Subject: Date:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+x+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2z}}{z^2+z+1}\,dz = \mathrm{Im}\left\{ \frac{2\pi \cancel{i}(e^{-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}\cancel{i}}\cos(1) - i\,\frac{2\pi \cancel{i}(e^{-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}\cancel{i}}\sin(1) \right\} = \frac{-2\pi e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\sin$$

$$z^2+z+1=0 \rightarrow \Delta = 1-4 = -3 \rightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \xrightarrow[\text{بالایی}]{\text{در نیم صفحه}} z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\mathrm{Res}_{z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{\overset{p(z)}{e^{i2z}}}{\underset{q(z)}{z^2+z+1}} \right) = \frac{e^{i2z}}{2z+1}\Bigg|_{z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} = \frac{e^{i(-1+i\sqrt{3})}}{-1+\sqrt{3}i+1} = \frac{e^{-i-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}i} = \frac{e^{-\sqrt{3}}e^{-i}}{\sqrt{3}i} = \frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}i}(\cos(1) - i\sin(1)).$$

۲) محاسبه بعضی انتگرال های ناسره: باید از نقاط غیر تحلیلی در نیم صفحه بالایی Res بگیریم.

$$1)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left(\sum Res(f(z))\right)$$

$$2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx = \underbrace{Re}_{\text{قسمت حقیقی}}\left\{2\pi i\left(\sum Res(f(z)e^{i\alpha z})\right)\right\}$$

$$3)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx = \underbrace{Im}_{\text{قسمت موهومی}}\left\{2\pi i\left(\sum Res(f(z)e^{i\alpha z})\right)\right\}$$

مثال:

$$1)\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)^2} = \frac{2\pi i}{2}\left(\sum Res(f(z))\right) = \pi i \times \frac{2}{36i} = \frac{\pi}{18}$$

* با توجه به بازه، باید انتگرال در $\frac{1}{2}$ ضرب بشود.

$z^2+4=0 \Rightarrow z=\pm 2i$
$z^2+1=0 \Rightarrow z=\pm i$
$\Rightarrow z=2i,\ z=i$ در نیم صفحه بالایی

$$\underset{z=2i}{Res}\left(\frac{\overbrace{1}^{p(z)}}{\underbrace{(z^2+4)}_{q(z)}(z^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2z(z^2+1)^2}\Bigg|_{z=2i} = \frac{1}{36i}$$

$$\underset{z=i}{Res}\left(\frac{1}{(z^2+4)(z^2+1)^{\overset{m}{2}}}\right) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left((z-i)^2\frac{1}{(z^2+4)(z-i)^2(z+i)^2}\right)' = \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z^2+4)(z+i)^2}\right)'$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{-[2z(z+i)+2(z^2+4)]}{(z^2+4)^2(z+i)^3} = \frac{1}{36i}$$

$$2)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}\,dx = Re\left\{2\pi i \times \frac{5e^{-4}}{32i}\right\} = Re\left\{\frac{5\pi e^{-4}}{16}\right\} = \frac{5\pi e^{-4}}{16}$$

$(z^2+4)^2=0 \Rightarrow z^2+4=0 \Rightarrow z=\pm 2i \Rightarrow z=2i$ (نیم صفحه بالایی) $\Rightarrow$

$$\underset{z=2i}{Res}\left(\frac{e^{i2z}}{(z^2+4)^{\overset{m}{2}}}\right) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2i}\left((z-2i)^2\frac{e^{i2z}}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right)'$$

$$= \lim_{z\to 2i}\left(\frac{e^{i2z}}{(z+2i)^2}\right)' = \lim_{z\to 2i}\frac{2i e^{i2z}(z+2i) - 2e^{i2z}}{(z+2i)^3} = \frac{2ie^{-4}(4i)-2e^{-4}}{-64i} = \frac{-(8e^{-4}+2e^{-4})}{-64i}$$

$$= \frac{10e^{-4}}{64i} = \frac{5e^{-4}}{32i}$$

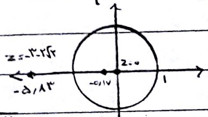
مثال 8 مطلوبست محاسبه:

1) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^2+1}{2z}}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\,\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^2+1}{2z}}{\frac{6z+z^2+1}{2z}}\,\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)\,dz}{(z^2+6z+1)z}$

$=\frac{1}{i}\times2\pi i\left(\sum Res(f(z))\right)=2\pi\left(1+\frac{18-12\sqrt2}{14-12\sqrt2}\right)=2\pi\left(\frac{14-12\sqrt2+18-12\sqrt2}{14-12\sqrt2}\right)=2\pi\left(\frac{34-24\sqrt2}{14-12\sqrt2}\right)=\frac{17-12\sqrt2}{4-3\sqrt2}\pi$

$z^2+6z+1=0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=36-4=32\Rightarrow z=\frac{-6\pm4\sqrt2}{2}\Rightarrow\begin{cases}z=-3+2\sqrt2 & \text{داخل دایره}\\ z=-3-2\sqrt2 & \text{خارج دایره}\end{cases}$

$\underset{z=0}{Res}\left(\frac{\overbrace{z^2+1}^{p(z)}}{\underbrace{z(z^2+6z+1)}_{q(z)}}\right)=\frac{z^2+1}{z^2+6z+1}\Big|_{z=0}=1$

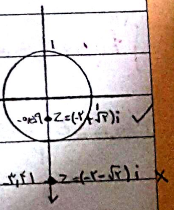


$\underset{z=-3+2\sqrt2}{Res}\left(\frac{\overbrace{z^2+1}^{p(z)}}{\underbrace{z(z^2+6z+1)}_{q(z)}}\right)=\frac{z^2+1}{z(2z+6)}\Big|_{z=-3+2\sqrt2}=\frac{(-3+2\sqrt2)^2+1}{(-3+2\sqrt2)(-6+4\sqrt2+6)}$

$=\frac{9+8-12\sqrt2+1}{14-12\sqrt2}=\frac{18-12\sqrt2}{14-12\sqrt2}$

2) $\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{z^2-1}{2iz}}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{4iz+z^2-1}{2iz}}=2\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4iz-1}=2\times2\pi i\times\frac{1}{2\sqrt3\,i}=\frac{2\pi}{\sqrt3}$ چون $\int_0^{+\infty}$ $\Rightarrow\times\frac{1}{2}$

$=\frac{\pi}{\sqrt3}$



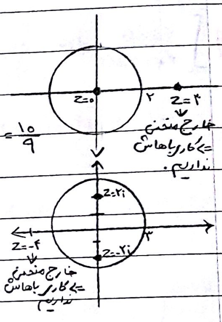
$z^2+4iz-1=0\Rightarrow\Delta=-16+4=-12\Rightarrow z=\frac{-4i\pm2\sqrt3\,i}{2}=(-2\pm\sqrt3)i$

$\underset{z=(-2+\sqrt3)i}{Res}\left(\frac{\overbrace{1}^{p(z)}}{\underbrace{z^2+4iz-1}_{q(z)}}\right)=\frac{1}{2z+4i}\Big|_{z=(-2+\sqrt3)i}=\frac{1}{-4i+2\sqrt3\,i+4i}=\frac{1}{2\sqrt3\,i}$

Subject: ۲۴ Date:

مثال: مطلوبست محاسبه:

1) $\oint_{|z|=2} \frac{3z+1}{z^2(3-z)}dz = 2\pi i\left(\underset{z=0}{\text{Res}}(f(z))\right) = 2\pi i \times \frac{10}{9} = \frac{20}{9}\pi i$



$\underset{z=0}{\text{Res}}\left(\frac{3z+1}{\underset{m}{z^2}(3-z)}\right) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(z^2 \times \frac{3z+1}{z^2(3-z)}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{3(3-z)+(3z+1)}{(3-z)^2} = \frac{10}{9}$

2) $\oint_{|z|=3} \frac{z\,dz}{(z+4)(z^2+4)} = 2\pi i\left(\sum \text{Res}(f(z))\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{4+2i}+\frac{1}{4-2i}\right) = \frac{2\pi}{5}i$

$z+4=0 \to z=-4 \quad \Big| \quad z^2+4=0 \to z=\pm 2i$

$\underset{z=2i}{\text{Res}}\left(\frac{\overset{p(z)}{z}}{(z+4)\underset{q(z)}{(z^2+4)}}\right) = \frac{z}{2z(z+4)}\Big|_{z=2i} = \frac{1}{2(4+2i)}$ ①

$\underset{z=-2i}{\text{Res}}\left(\frac{\overset{p(z)}{z}}{(z+4)\underset{q(z)}{(z^2+4)}}\right) = \frac{z}{2z(z+4)}\Big|_{z=-2i} = \frac{1}{2(4-2i)}$ ②

کاربردهای انتگرال مختلط توابع مختلف:

1) محاسبه انتگرال هایی به شکل: $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ داریم:

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}$

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \Rightarrow \sin\theta = \frac{z^2-1}{2iz}$

$z=e^{i\theta} \to dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$

Subject: Date:

روش های محاسبه مانده: از محاسبه مانده ها در نقاط z از یکی از دو روش زیر استفاده می کنیم:

۱) روش $\frac{p}{q}$: اگر توان $(z-z_0)$ در مخرج کسر یک باشد و $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ ، آنگاه:

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}(f(z))=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

۲) روش m: اگر توان $(z-z_0)$ در مخرج کسر m باشد ، آنگاه:

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}(f(z))=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}$$

مثال:

۱) $\underset{z=2}{\mathrm{Res}}\left(\frac{z+1}{(z-2)(z^2+4)}\right)=\frac{z+1}{z^2+4}\Big|_{z=2}=\frac{3}{8}$

($p(z)=z+1$ ، $q(z)$ توان یک)

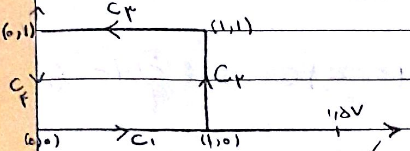
۲) $\underset{z=1}{\mathrm{Res}}\left(\frac{(2z-1)}{(z-1)^2(3z-1)}\right)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\frac{(2z-1)}{(z-1)^2(3z-1)}\right)'=\lim_{z\to 1}\left(\frac{2z-1}{3z-1}\right)'$

$=\lim_{z\to 1}\frac{2(3z-1)-3(2z-1)}{(3z-1)^2}=\frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}$

۳) $\underset{z=\frac{1}{3}}{\mathrm{Res}}\left(\frac{(2z-1)}{(z-1)^2(3z-1)}\right)=\frac{(2z-1)}{3(z-1)^2}\Big|_{z=\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{3}-1}{3(\frac{1}{3}-1)^2}=\frac{-1}{4}$

۴) $\underset{z=0}{\mathrm{Res}}\left(\frac{\cos(2z)}{z^3}\right)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\times\frac{\cos(2z)}{z^3}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}-4\cos(2z)=\frac{-4}{2}\times 1=-2$

مثال: مطلوبست محاسبه $\oint_C (\underset{\star}{tgz} + \bar{z})\,dz$ (tgz: در مربع تحلیلی ، $\bar{z}$: همه جا غیرتحلیلی) که C مربعی با رئوس (0,0) ، (1,0) ، (1,1) و (0,1) در خلاف عقربه ساعت است؟



tgz در تمام نقاط داخل و درون مربع تحلیلی ($\frac{\sin z}{\cos z}$) است ، در جاهایی که cos z صفر است ، تابع غیرتحلیلی است.

یعنی مثلاً $\left(\cos z = 0 \to z = \frac{\pi}{2} = 1.57 \Rightarrow (1.57, 0)\right) \Leftarrow$ بیرون ناحیه است پس داریم: $\oint_C tgz\,dz = 0$

$C_1: \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{0-0} = t \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad , z = t \to \bar{z} = t \Rightarrow dz = dt$

$\Rightarrow \oint_{C_1} \bar{z}\,dz = \int_0^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$C_2: \frac{x-1}{1-1} = \frac{y-0}{1-0} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad , z = 1 + it \to \bar{z} = 1 - it \Rightarrow dz = i\,dt$

$\Rightarrow \oint_{C_2} \bar{z}\,dz = \int_0^1 (1 - it)(i)\,dt = \int_0^1 (i + t)\,dt = \left(it + \frac{t^2}{2}\right)_0^1 = i + \frac{1}{2}$

$C_3: \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-1}{1-1} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad , z = 1 - t + i \to \bar{z} = 1 - t - i \Rightarrow dz = -dt$

$\Rightarrow \oint_{C_3} \bar{z}\,dz = \int_0^1 (1 - t - i)(-dt) = \int_0^1 (t + i - 1)\,dt = \left(\frac{t^2}{2} + it - t\right)_0^1 = \frac{1}{2} + i - 1 = i - \frac{1}{2}$

$C_4: \frac{x-0}{0-0} = \frac{y-1}{0-1} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad , z = i(1-t) \to \bar{z} = -i(1-t) \Rightarrow dz = -i\,dt$

$\Rightarrow \oint_{C_4} \bar{z}\,dz = \int_0^1 (-i(1-t))(-i)\,dt = \int_0^1 (t - 1)\,dt = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$

$\oint_C \bar{z}\,dz = \frac{1}{2} + i + \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2i$

Subject: Date:

نکته: اگر تابعی در همه‌جا غیرتحلیلی بود، از فرمول های پارامتری کردن استفاده می‌کنیم.

مثال: مطلوبست محاسبهٔ:

1) $\oint_{|z|=2} \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} 2e^{-it}(2ie^{it})\,dt = 4it\Big|_0^{2\pi} = 8\pi i$

(همه‌جا غیرتحلیلی)

$|z|=2$، دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲.

C دایره است $\Rightarrow z = 2e^{it} \to \bar{z} = 2e^{-it} \Rightarrow dz = 2ie^{it}dt$ ، دایره کامل است $\Leftarrow$ $0 \leq t \leq 2\pi$ که

2) $\oint_{|z|=3} |z|\,dz = \int_0^{2\pi} 3(3ie^{it})\,dt = (9i)\left(\frac{1}{i}e^{it}\right)\Big|_0^{2\pi} = 9e^{i2\pi} - 9e^{0} = 9 - 9 = 0$

(همه‌جا غیرتحلیلی)

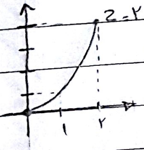
$|z|=3$، دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۳.

C دایره است $\Rightarrow z = 3e^{it} \to dz = 3ie^{it}dt$ ، $\searrow |z| = 3$ ، دایره کامل است $\Leftarrow$ $0 \leq t \leq 2\pi$ که

نکته: $|z| = a \Rightarrow z = ae^{i\alpha t} \Leftarrow$

مثال: مطلوبست محاسبهٔ $\int_C (e^{2z} + \bar{z})\,dz$ که C قسمتی از منحنی $y = x^2$ از مبدأ تا $2+4i$ است.

(برای e^{2z}: تحلیلی؛ برای $\bar{z}$: همه‌جا غیر... همه‌جا تحلیلی)



$\int_C e^{2z}\,dz \overset{\text{۲ حالت}}{=\!=} \frac{1}{2}e^{2z}\Big|_0^{2+4i} = \frac{1}{2}e^{4+8i} - \frac{1}{2}$ $t + i2t^2 - it^2 + 2t^3$

$\int_C \bar{z}\,dz \overset{\text{حالت ۳}}{=\!=} \int_0^2 (t - it^2)(1 + i2t)\,dt = \int_0^2 (t + it^2 + 2t^3)\,dt = \left(\frac{t^2}{2} + i\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{2}\right)\Big|_0^2 = 10 + \frac{8}{3}i$

$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ که $0 \leq t \leq 2 \Rightarrow z = t + it^2 \to \bar{z} = t - it^2 \Rightarrow dz = (1 + i2t)\,dt$

Subject: .... Date: ....

نکته: $|z|=a$ یعنی دایره به مرکز مبدأ و شعاع a . $|z-z_0|=a$ یعنی دایره به مرکز z_0 و شعاع a

نکته: توابع تحلیلی مانند چندجمله‌ای‌ها ، $\sin$ ، $\cos$ ، $\sinh$ ، $\cosh$ ، نمایی و ....

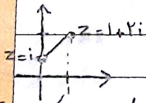
مثال: حاصل انتگرال زیر را بیابید؟ $\oint_{|z|=2} z^2 e^{3z}\, dz$

۱) $|z|=2$: دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ $\Leftarrow$ C منحنی بسته
۲) z^2 و e^{3z} ، در همه جا تحلیلی هستند

$\Leftarrow \oint_{|z|=2} z^2 e^{3z}\, dz = 0$

نکته: توابع کسری که صورت و مخرج آنها توابع تحلیلی باشد ، در نقاطی که مخرج صفر می‌شود ، غیر تحلیلی است.

مثال: مطلوبست محاسبه $\int_C z^2 dz$ که در آن C قسمتی از خط $y=x+1$ است که نقطه $z=i$ را به نقطه $z=1+2i$ وصل می‌کند؟



۱) C منحنی باز ۲) $f(z)$ در تمام نقاط تحلیلی $\Leftarrow f(z)$ در ناحیه D تحلیلی ۳) نقطه A را به نقطه B وصل کرده است

با توجه به ①، ②، ③ حالت دوم $\Leftarrow \int_C z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_i^{1+2i} = \frac{(1+2i)^3 - i^3}{3} = \frac{1+6i-12-8i+i}{3} = -\frac{11}{3} - \frac{i}{3}$

فرمول‌های پارامتری کردن:

۱) اگر C خطی باشد که نقطه (x_0, y_0) را به نقطه (x_1, y_1) وصل کند ، داریم: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = t$

۲) اگر C دایره‌ی $|z-z_0|=a$ باشد ، قرار می‌دهیم: $z - z_0 = a e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

۳) اگر C منحنی $y=f(x)$ باشد ، قرار می‌دهیم: $\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}$

ubject: .... Date: ....

مثال: مزدوج همساز $u=x^3-3xy^2$ را بیابید و سپس تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را بر

حل: z بنویسید

$u_x = v_y \Rightarrow v_y = 3x^2 - 3y^2 \xrightarrow{\int dy} v = 3x^2y - y^3$

$u_y = -v_x \Rightarrow v_x = 6xy \xrightarrow{\int dx} v = 3x^2y$

$\Rightarrow v = 3x^2y - y^3$ مزدوج همساز

$\Rightarrow f(z) = u + iv = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = (x+iy)^3 = z^3$

انتگرال گیری از توابع مختلط روی منحنی: با نماد $\int_C f(z)\,dz$ نشان می‌دهیم و به یکی از صورت‌های

زیر محاسبه می‌کنیم:

قضیه: فرض کنید $f(z)=u+iv$ تابع تحلیلی باشد، در اینصورت u و v توابعی همساز باشند. یعنی $u_{xx}+u_{yy}=0$ و $v_{xx}+v_{yy}=0$ و u و v را مزدوج همساز یکدیگر می‌نامند که با داشتن یکی از آنها، می‌توان دیگری را با کمک دستگاه معادلات کوشی - ریمان بدست آورد.

مثال: a را چنان بیابید تا تابع $u=e^{2x}\cos(ay)$ همساز شود و v مزدوج همساز آن را بدست آورید و تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را برحسب z بنویسید؟

$$u_{xx}+u_{yy}=4e^{2x}\cos(ay)-a^2e^{2x}\cos(ay)=0 \Rightarrow (4-a^2)\underbrace{e^{2x}}_{\neq 0}\cos(ay)=0$$

$$\Rightarrow 4-a^2=0 \rightarrow a=\pm 2 \rightarrow u=e^{2x}\cos(\pm 2y) \Rightarrow u=e^{2x}\cos(2y)$$

$$\begin{cases} u_x=v_y \rightarrow v_y=2e^{2x}\cos(2y) \xrightarrow{\int dy} v=e^{2x}\sin(2y) \\ u_y=-v_x \rightarrow v_x=2e^{2x}\sin(2y) \xrightarrow{\int dx} v=e^{2x}\sin(2y) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} v=e^{2x}\sin(2y)$$

نکته: از جملات بدست آمده، اجتماع می‌گیریم، یعنی جملات مشترک را فقط یک بار به همراه تمامی جملات غیر مشترک می‌نویسیم.

بنابراین:

$$\left.\begin{matrix} v=e^{2x}\sin(2y) \\ \\ u=e^{2x}\cos(2y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} f(z)=u+iv=e^{2x}\cos(2y)+ie^{2x}\sin(2y)=e^{2x}(\cos(2y)+i\sin(2y)) \\ \Rightarrow f(z)=e^{2x}e^{i2y}=e^{2x+i2y}=e^{2(x+iy)}=e^{2z} \end{matrix}$$

Subject: Date:

تعمیم کوشی - ریمان در مختصات قطبی: فرض کنید $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ در این صورت دستگاه معادلات کوشی - ریمان قطبی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} u_r=\frac{1}{r}v_\theta \\ v_r=\frac{-1}{r}u_\theta \end{cases}$$

و مشتق در صورت وجود از فرمول $f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta}$ بدست می آید.

مثال: مشتق پذیری و تحلیلی بودن $w=z^{20}$ در صفحه مختلط بحث کنید و مشتق را در صورت وجود بیابید؟

$$w=(re^{i\theta})^{20}=r^{20}e^{i20\theta}=r^{20}(\cos 20\theta+i\sin 20\theta)=\underbrace{r^{20}\cos(20\theta)}_{u}+i\underbrace{r^{20}\sin(20\theta)}_{v}$$

$$\begin{cases} u_r=20r^{19}\cos(20\theta) \\ v_\theta=20r^{20}\cos(20\theta) \end{cases} \Rightarrow u_r=\frac{1}{r}v_\theta$$

$$\begin{cases} v_r=20r^{19}\sin(20\theta) \\ u_\theta=-20r^{20}\sin(20\theta) \end{cases} \Rightarrow v_r=\frac{-1}{r}u_\theta$$

⇐ تابع تام است و همه جا مشتق پذیر و همه جا تحلیلی است

$$f'(z)=(u_r+iv_r)e^{-i\theta}=(20r^{19}\cos(20\theta)+i(20r^{19}\sin(20\theta)))e^{-i\theta}$$

$$=20r^{19}(\cos(20\theta)+i\sin(20\theta))e^{-i\theta}=20r^{19}e^{i20\theta}e^{-i\theta}=20r^{19}e^{i19\theta}=20(re^{i\theta})^{19}=20z^{19}$$

تابع همساز (هارمونیک): تابع $u(x,y)$ همساز است، اگر در معادله زیر صدق کند:

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

مثال: a را چنان بیابید که تابع $u=x^2-ay^2$ همساز شود؟

$$\begin{cases} u_{xx}=2 \\ u_{yy}=-2a \end{cases} \xrightarrow{\text{تابع همساز}} u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=2-2a=0 \rightarrow a=1$$

۴) $f(z)=\cosh(\bar{z}) \Rightarrow w=\cosh(\bar{z})=\cosh(x-iy)=\cosh x\,\underbrace{\cosh(iy)}_{=\cos(y)}-\sinh(x)\,\underbrace{\sinh(iy)}_{i\sin y}$

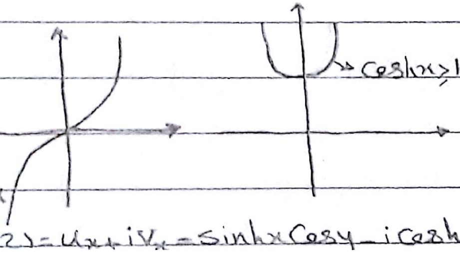
$=\underbrace{\cosh x\cos y}_{u}+i\underbrace{(-\sinh(x)\sin y)}_{v}$

$\begin{cases} u_x=\sinh x\cos y \\ v_y=-\sinh x\cos y \end{cases} \Rightarrow u_x=v_y \Rightarrow \sinh x\cos y=-\sinh x\cos y \Rightarrow 2\sinh x\underbrace{\cos y}_{\pm 1}=0$

$\Rightarrow \sinh x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$\begin{cases} u_y=-\cosh x\sin y \\ v_x=-\cosh x\sin y \end{cases} \Rightarrow u_y=-v_x \Rightarrow -\cosh x\sin y=\cosh x\sin y \Rightarrow 2\underbrace{\cosh x}_{\neq 0}\sin y=0$

$\Rightarrow \sin y=0 \Rightarrow \boxed{y=k\pi}$



...ع در نقاط $Z=x+iy=ik\pi$ مشتق دارد ولی هیچ جا تحلیلی نیست.

$f'(z)=u_x+iv_x=\sinh x\cos y-i\cosh x\sin y \xrightarrow[y=k\pi]{x=0} f'(ik\pi)=0$

Subject: ____________ Date: ____________

۲) $f(z)=e^{\bar z} \Rightarrow w=e^{\bar z}=e^{x-iy}=e^{x}e^{-iy}=e^{x}(\cos(y)-i\sin(y))=\underbrace{e^{x}\cos(y)}_{u}+i(\underbrace{-e^{x}\sin(y)}_{v})$

$\begin{cases} u_x=e^{x}\cos(y) \\ v_y=-e^{x}\cos(y) \end{cases} \Rightarrow u_x=v_y \Rightarrow e^{x}\cos y=-e^{x}\cos y \Rightarrow 2\underbrace{e^{x}}_{\neq 0}\cos y=0 \Rightarrow \cos y=0 \Rightarrow y=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ *

$\begin{cases} u_y=-e^{x}\sin(y) \\ v_x=-e^{x}\sin(y) \end{cases} \Rightarrow u_y=-v_x \Rightarrow -e^{x}\sin(y)=e^{x}\sin(y) \Rightarrow 2\underbrace{e^{x}}_{\neq 0}\sin(y)=0$ $\overset{*}{\Rightarrow} \pm 1$

⇐ $w=e^{\bar z}$ هیچ جا مشتق ندارد و هیچ جا تحلیلی نیست.

یادآوری:

۱) $\sin(a\mp b)=\sin a\cos b\mp\sin b\cos a$

۲) $\cos(a\mp b)=\cos a\cos b\pm\sin a\sin b$

۳) $\sinh(a\mp b)=\sinh a\cosh a\mp\sinh b\cosh a$

۴) $\cosh(a\mp b)=\cosh a\cosh b\mp\sinh a\sinh b$

۳) $f(z)=\sin(2z) \Rightarrow w=\sin(2z)=\sin(2(x+iy))=\sin(2x+i2y)$

$=\sin 2x\underbrace{\cos(i2y)}_{=\cosh(2y)}+\underbrace{\sin(i2y)}_{=i\sinh(2y)}\cos 2x=\underbrace{\sin 2x\cosh(2y)}_{u}+i\underbrace{\sinh(2y)\cos 2x}_{v}$

$\begin{cases} u_x=2\cos 2x\cosh(2y) \\ v_y=2\cos 2x\cosh(2y) \end{cases} \Rightarrow u_x=v_y$

$\begin{cases} u_y=2\sin 2x\sinh 2y \\ v_x=-2\sin 2x\sinh 2y \end{cases} \Rightarrow u_y=-v_x$

⇐ تابع تام است و همه جا مشتق پذیر است و همه جا تحلیلی است

$f'(z)=u_x+iv_x=2\cos 2x\underbrace{\cosh(2y)}_{=\cos(i2y)}+i(-2\sin 2x\underbrace{\sinh(2y)}_{=i\sinh(2y)})=$

$=2[\cos 2x\cosh(i2y)+\sin 2x\sinh(2y)]=2\cos(2x-i2y)=2\cos(2z)$

Date:

مثال: در تحلیلی بودن توابع مثال قبل در صفحه مختلف بحث کنید.

مثال ۱: تابع $w=z^2$ همه جا مشتق دارد و همه جا تحلیلی است.

مثال ۲: تابع $w=\bar{z}$ هیچ جا مشتق ندارد و هیچ جا تحلیلی نیست.

مثال ۳: تابع در نقطه $z=0$ مشتق دارد و هیچ جا تحلیلی نیست.

مثال ۴: تابع در نقاط خط $x=y$ مشتق دارد و هیچ جا تحلیلی نیست.

نکته: توابع تام، همه جا مشتق دارند و همه جا تحلیلی هستند.

مثال: در تحلیلی بودن توابع زیر در صفحه مختلف بحث کنید و مشتق آنها را در نقاط مشتق پذیر بیابید.

$$1)\ f(z)=e^{2z} \Rightarrow w=e^{2(x+iy)}=e^{2x+i2y}=e^{2x}e^{i2y}=e^{2x}(\cos(2y)+i\sin(2y))$$

$$=\underbrace{e^{2x}\cos(2y)}_{u}+i\,\underbrace{e^{2x}\sin(2y)}_{v}$$

$$\begin{cases} u_x=2e^{2x}\cos(2y) \\ v_y=2e^{2x}\cos(2y) \end{cases} \Rightarrow u_x=v_y$$

$$\begin{cases} u_y=-2e^{2x}\sin(2y) \\ v_x=2e^{2x}\sin(2y) \end{cases} \Rightarrow u_y=-v_x$$

$\Rightarrow$ $w=e^{2z}$ تابع تام است و همه جا مشتق پذیر و همه جا تحلیلی است

$$f'(z)=u_x+iv_x=2e^{2x}\cos(2y)+i2e^{2x}\sin(2y)=2e^{2x}(\cos(2y)+i\sin(2y))=2e^{2x}e^{i2y}=2e^{2x+i2y}$$

$$\Rightarrow f'(z)=2e^{2(x+iy)}=2e^{2z}$$

Subject   Date:

$f(z)=\bar{z} \Rightarrow w=\bar{z}=x+i(-y) \Rightarrow \begin{cases} u_x=1 \\ v_y=-1 \end{cases} \Rightarrow u_x \neq v_y \Rightarrow$ $\bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای از صفحه مختلط مشتق ندارد.

$f(z)=|z|^2 \Rightarrow w=|z|^2=x^2+y^2$

$u_x=2x,\ v_y=0 \Rightarrow$ وقتی $u_x=v_y$ است که $x=0$ باشد

$u_y=2y,\ v_x=0 \Rightarrow$ وقتی $u_y=-v_x$ است که $y=0$ باشد

اشتراک $\Rightarrow$ $w=|z|^2$ فقط در مبدأ مشتق‌پذیر است

$\Rightarrow z=x+iy=0$, $f'(z)=u_x+iv_x$ $\Rightarrow f'(z=0)=2x$

$f(z)=(Re(z))^2+i(Im(z))^2 \Rightarrow w=x^2+iy^2$

$u_x=2x,\ v_y=2y \Rightarrow$ وقتی $u_x=v_y$ است که $y=x$ باشد

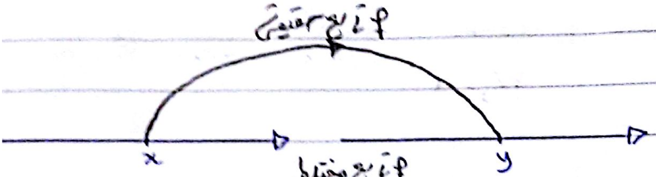
$u_y=0,\ v_x=0 \Rightarrow$ در همه نقاط $u_y=-v_x$ است

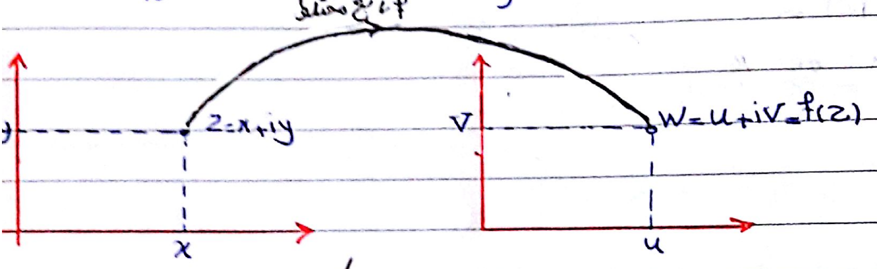
اشتراک $\Rightarrow$ تابع در نقاط $x=y$ مشتق دارد.

$f'(z)=u_x+iv_x=2x \Rightarrow \begin{cases} f'(1+i)=?\ 2 \\ f'(-2-2i)=?\ 2(-2)=-4 \\ f'(3+i)=?\ \text{موجود نمی‌باشد} \quad (y\neq x) \end{cases}$

تابع تحلیلی: تابع $w=f(z)$ را در نقطه z_0 تحلیلی گوییم، اگر به مرکز z_0 دایره‌ای به شعاع ε موجود باشد به طوری که $f(z)$ در نقاط داخل آن دایره، مشتق‌پذیر باشد.

توابع مختلط:





مشتق توابع مختلط (قضیه کوشی - ریمان در مختصات دکارتی): فرض کنید $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

اگر در صفحه مختلط، نقاطی موجود باشند به طوری که $f(z)$ در آن نقاط، در دستگاه معادلات

کوشی - ریمان به شکل: $\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$ صدق نکرد، $f(z)$ در آن نقاط مشتق ندارد

اگر صدق کرد و توابع u، v، u_x، v_x، u_y، v_y در آن نقاط پیوسته باشند، f در آن

مشتق دارد، در این صورت: $f'(z)=u_x+iv_x$

مثال: در مشتق پذیری توابع زیر در صفحه مختلط بحث کنید و مشتق آن ها را در صورت وجود بیابید؟

$1)\ f(z)=z^2 \rightarrow w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$

$u_x=2x$, $v_y=2x \Rightarrow u_x=v_y$

$u_y=-2y$, $v_x=2y \Rightarrow u_y=-v_x$

$\Rightarrow$ z^2 در تمام نقاط صفحه مختلط مشتق پذیر است (z^2 تابع کامل است)

$f'(z)=u_x+iv_x=2x+i(2y)=2(x+iy)=2z$

Subject: .... Date: ....

مثال: عدد مختلط $z = -1 - i$ را قطبی کنید.

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$x<0 \rightarrow \theta = \pi + Arctg(\frac{-1}{-1}) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow z = re^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$

مثال: عدد مختلط $z = -2i$ را قطبی کنید.

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ x = 0,\ y<0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \rightarrow z = re^{i\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

نکته:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta & (1) \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \rightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$(1)-(2) \rightarrow e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

نکته: در فرمول های فوق θ را به $i\theta$ تبدیل می کنیم و داریم:

$\cos(i\theta) = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} \Rightarrow \boxed{\cos(i\theta) = \cosh(\theta)}$

$\sin(i\theta) = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = \underbrace{\frac{-1}{i}}_{=i} \times \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \Rightarrow \boxed{\sin(i\theta) = i\sinh(\theta)}$

نکته: در فرمول های فوق θ را به $i\theta$ تبدیل می کنیم و داریم:

$\cosh(i\theta) = \cos(-\theta) \Rightarrow \boxed{\cosh(i\theta) = \cos\theta}$

$i\sinh(i\theta) = \sin(-\theta) \Rightarrow \sinh(i\theta) = \underbrace{\frac{-1}{i}}_{=i} \sin\theta \Rightarrow \boxed{\sinh(i\theta) = i\sin\theta}$

نکته: برای تبدیل نمایش قطبی به نمایش دکارتی از فرمول های اویلر استفاده می کنیم.

فرمول های اویلر:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

نکته: برای تبدیل نمایش دکارتی به نمایش قطبی از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta : \begin{cases} x > 0 \rightarrow \theta = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ x < 0 \rightarrow \theta = \pi + \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ x = 0, y > 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ x = 0, y < 0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{Arctg}\, x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

مثال: عدد مختلط $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ را به نمایش دکارتی تبدیل کنید؟

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

مثال: عدد مختلط $z = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ را به نمایش دکارتی تبدیل کنید؟

$$z = 3e^{-i\frac{\pi}{4}} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

مثال: عدد مختلط $z = 1 - i\sqrt{3}$ را قطبی کنید؟

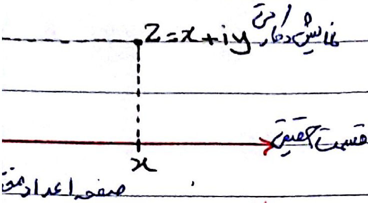
$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$x > 0 \Rightarrow \theta = \text{Arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$z = re^{i\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Subject: قسمت   Date:

نمایش دکارتی اعداد مختلط:



عملیات جمع ـ تفریق ـ ضرب ـ تقسیم دو اعداد مختلط در حالت دکارتی:

۱) در اعمال جمع و تفریق، x ها را باهم و y ها را باهم جمع و تفریق می‌کنیم.

۲) در عمل ضرب، مؤلفه‌ها مؤلفه‌ها در هم ضرب می‌کنیم.

۳) در عمل تقسیم به صورت، مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

مثال: اگر $z_1=-1+2i$ ، $z_2=2-3i$ مطلوبست محاسبه z_2-z_1 ، $2z_1+3z_2$ ، $z_1 z_2$ ، $\frac{z_1}{z_2}$ ؟

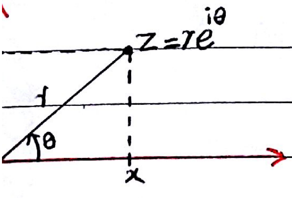
$$z_2-z_1=2-3i+1-2i=3-5i$$

$$2z_1+3z_2=2(-1+2i)+3(2-3i)=-2+4i+6-9i=4-5i$$

$$z_1\cdot z_2=(-1+2i)(2-3i)=-2+3i+4i-6\underbrace{i^2}_{=-1}=4+7i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(-1+2i)}{(2-3i)}\times\frac{(2+3i)}{(2+3i)}=\frac{-2-3i+4i+6i^2}{4-9i^2}=\frac{-8+i}{13}=-\frac{8}{13}+\frac{1}{13}i$$

نمایش قطبی اعداد مختلط:



Subject: (14) Date:

$$\Rightarrow (\tilde{u}_c)_y(\omega,0) = \omega b(\omega) + \frac{K(\omega)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{-\omega^2} = H(\omega) \Rightarrow b(\omega) = \frac{H(\omega)}{\omega} + \frac{K(\omega)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega^2}$$

$$\tilde{u}_c(\omega,1) = a(\omega)\cosh(\omega) + \left(\frac{H(\omega)}{\omega} + \frac{K(\omega)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega^2}\right)\sinh(\omega) - \frac{K(\omega)}{\omega^2} = 0$$

$$\Rightarrow a(\omega) = \frac{\frac{K(\omega)}{\omega^2} - \left(\frac{H(\omega)}{\omega} + \frac{K(\omega)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega^2}\right)\sinh(\omega)}{\cosh(\omega)}$$

$$\xrightarrow{\text{فوریه معکوس}} u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\frac{K(\omega)}{\omega^2} - \left(\frac{H(\omega)}{\omega} + \frac{K(\omega)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega^2}\right)\sinh(\omega)}{\cosh(\omega)}\cosh(\omega y) + \left(\frac{H(\omega)}{\omega} + \frac{K(\omega)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega^2}\right)\sinh(\omega y)\right]\cos(\omega x)\,d\omega$$

Subject: ------------------ Date: ------------

شرایط اولیه $\Rightarrow \tilde{U}_c(\omega,0)=a(\omega)=H(\omega)$, $(\tilde{U}_c)_t(\omega,0)=\omega b(\omega)+\frac{K(\omega)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega^2}=0 \Rightarrow b(\omega)=\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}-k(\omega)}{\omega^3}$

*) فوریه معکوس کسینوسی $\Rightarrow u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(H(\omega)\cos(\omega t)+\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}-k(\omega)}{\omega^3}\sin(\omega t)+\frac{t\left(k(\omega)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)}{\omega^2}\right)\cos(\omega x)\,d\omega$

مثال: مسئله زیر را حل کنید؟

$u_t=4u_{xx}$ یک شرط اولیه و یک شرط مرزی $\Rightarrow$ فوریه سینوسی

$$\begin{cases} u(x,0)=\begin{cases} x^2 & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases} \\ u(0,t)=0 \end{cases}$$

شرط اولیه، فوریه سینوسی $\Rightarrow \tilde{U}_s(\omega,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}x^2\sin(\omega x)\,dx=H(\omega)$

از معادله، فوریه سینوسی میگیریم $\Rightarrow (\tilde{U}_s)_t-4\left(-\omega^2\tilde{U}_s+\omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,u(0,t)\right)=0$ (شرط مرزی)

$\Rightarrow (\tilde{U}_s)_t+4\omega^2\tilde{U}_s=0$ معادله مرتبه اول خطی $\Rightarrow \tilde{U}_s(\omega,t)=e^{-4\omega^2 t}\left(\int e^{4\omega^2 t}(0)\,dt+a(\omega)\right)$

$\Rightarrow \tilde{U}_s(\omega,t)=a(\omega)e^{-4\omega^2 t}$ شرط اولیه $\Rightarrow \tilde{U}_s(\omega,0)=\boxed{a(\omega)=H(\omega)}$

$\Rightarrow \tilde{U}_s(\omega,t)=H(\omega)e^{-4\omega^2 t}$ (*) فوریه سینوسی معکوس $\Rightarrow u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(H(\omega)e^{-4\omega^2 t}\right)\sin(\omega x)\,d\omega$

مثال: مسئله زیر را حل کنید؟ معادله پواسون نیمه متناهی $\Leftarrow$ یک شرط مرزی و ۲ شرط اولیه

$u_{xx}+u_{yy}=ye^{-x}$

با توجه به شرایط اولیه: x متغیر و y عدد ثابت

$u_x(0,y)=y-1$ شرط نیومن

$u_y(x,0)=\begin{cases} x^2 & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$ فوریه کسینوسی $\Rightarrow (\tilde{U}_c)_y(\omega,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}x^2\cos(\omega x)\,dx=H(\omega)$

$u(x,1)=0$ فوریه کسینوسی $\Rightarrow \tilde{U}_c(\omega,1)=0$

از معادله، فوریه کسینوسی میگیریم $\Rightarrow \left(-\omega^2\tilde{U}_c-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\underbrace{u_x(0,y)}_{y-1}\right)+(\tilde{U}_c)_{yy}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}ye^{-x}\cos(\omega x)\,dx=yK(\omega)$

$\Rightarrow (\tilde{U}_c)_{yy}-\omega^2\tilde{U}_c=\left(K(\omega)y+\sqrt{\frac{2}{\pi}}(y-1)\right)\Rightarrow \lambda^2-\omega^2=0\Rightarrow \lambda=\pm\omega$

$\tilde{U}_c(\omega,y)=a(\omega)\cosh(\omega y)+b(\omega)\sinh(\omega y)+\frac{K(\omega)y+\sqrt{\frac{2}{\pi}}(y-1)}{-\omega^2}$ (*)

یادآوری:

$$f(x) \xrightarrow{\text{فوریه سینوسی}} \tilde{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx$$

$$f(x) \xrightarrow{\text{فوریه کسینوسی}} \tilde{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$\tilde{f}_s(\omega) \xrightarrow{\text{فوریه معکوس}} f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}_s(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega$$

$$\tilde{f}_c(\omega) \xrightarrow{\text{فوریه معکوس}} f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}_c(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$$

نکته:

1) $u(x,t) \xrightarrow{\text{فوریه سینوسی}} \tilde{u}_s(\omega,t)$, $u(x,t) \rightarrow \tilde{u}_c(\omega,t)$

2) $u_t \xrightarrow{\text{فوریه سینوسی}} (\tilde{u}_s)_t$, $u_t \xrightarrow{\text{فوریه کسینوسی}} (\tilde{u}_c)_t$

3) $u_{xx} \xrightarrow{\text{فوریه سینوسی}} -\omega^2\tilde{u}_s + \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,u(0,t)$

$u_{xx} \xrightarrow{\text{فوریه کسینوسی}} -\omega^2\tilde{u}_c - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,u_x(0,t)$

مثال: مسأله زیر را حل کنید؟

$$u_{tt} - u_{xx} = \begin{cases} xt & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$$

نکته: چون شرط مرزی مشتق دارد ← فوریه کسینوسی

$$\begin{cases} u(x,0) = e^{-x} \xrightarrow{\text{فوریه کسینوسی}} \tilde{u}_c(\omega,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\omega x)\,dx = H(\omega) \\ u_t(x,0) = 0 \xrightarrow{\text{فوریه کسینوسی}} (\tilde{u}_c)_t(\omega,0) = 0 \\ u_x(0,t) = t \quad \text{شرط مرزی} \end{cases}$$

از معادله فوریه کسینوسی میگیریم:

$$(\tilde{u}_c)_{tt} - \left(-\omega^2\tilde{u}_c - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,u_x(0,t)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} xt\cos(\omega x)\,dx = t\,k(\omega)$$

$$\Rightarrow (\tilde{u}_c)_{tt} + \omega^2\tilde{u}_c = t\left(k(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm\omega i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \omega \end{cases}$$

$$\tilde{u}_c(\omega,t) = a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t) + \frac{t\left(k(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)}{\omega^2} \quad (*)$$

$\hat{U}(0,\omega)=A(\omega)=H(\omega)$ ، $\hat{U}_x(\pi,\omega)=\omega H(\omega)\sinh(\omega\pi)+\omega B(\omega)\cosh(\omega\pi)=K(\omega)$

$\Rightarrow B(\omega)=\dfrac{K(\omega)-\omega H(\omega)\sinh(\omega\pi)}{\omega\cosh(\omega\pi)}$

* [illegible]: $U(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H(\omega)\cosh(\omega x)+\frac{K(\omega)-\omega H(\omega)\sinh(\omega\pi)}{\omega\cosh(\omega\pi)}\right]e^{i\omega y}\,d\omega$

مسائل موج و گرما و پتانسیل غیرمتجانس:

معادله موج: $U_{tt}-c^2U_{xx}=F(x,t)$

شرایط مسائل موج غیرمتجانس:

- شرایط اولیه: $U(x,0)=f(x)$ ، $U_t(x,0)=g(x)$
- شرط مرزی: $U(0,t)=p(t)$ یا $U_x(0,t)=p(t)$

معادله گرما: $U_t-c^2U_{xx}=F(x,t)$

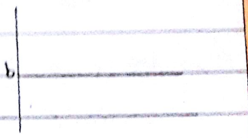
شرایط مسئله گرمای غیرمتجانس:

- شرط اولیه: $U(x,0)=f(x)$
- شرط مرزی: $U(0,t)=p(t)$ یا $U_x(0,t)=p(t)$

معادله پتانسیل: $U_{xx}+U_{yy}=F(x,y)$

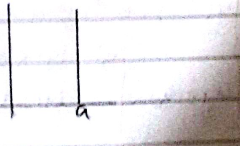
شرایط مسئله پتانسیل برای $0<x<\infty$:

- شرایط اولیه: $U(x,0)=f_1(x)$ یا $U_y(x,0)=f_1(x)$ ، $U(x,b)=f_2(x)$ یا $U_y(x,b)=f_2(x)$
- شرط مرزی: $U(0,y)=g(y)$ یا $U_x(0,y)=g(y)$



شرایط مسئله پتانسیل برای $0<y<\infty$:

- شرایط اولیه: $U(0,y)=g_1(y)$ یا $U_x(0,y)=g_1(y)$ ، $U(a,y)=g_2(y)$ یا $U_x(a,y)=g_2(y)$
- شرط مرزی: $U(x,0)=f_1(x)$ یا $U_y(x,0)=f_1(x)$



نکته مهم: اگر شرط مرزی مشتق نداشت، از طرفین معادله و شرایط اولیه‌ی آن، تبدیل فوریه‌ی سینوسی و اگر شرط مرزی مشتق داشت، از طرفین معادله و شرایط اولیه‌ی آن، تبدیل فوریه‌ی کسینوسی می‌گیریم.

جواب عمومی: $\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه معکوس}} u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[H(\omega)\cos(3\omega t)+\frac{-K(\omega)}{3\omega^2}\sin(3\omega t)\right]e^{i\omega x}\,d\omega$ (*)

مثال: مسأله زیر را حل کنید؟ نکته: با توجه به بازه‌ها و معادله متوجه می‌شویم که معادله گرما را نامتناهی را باید حل کنیم ⇐ شرایط مرزی نداریم

$u_t-9u_{xx}=2te^{-|x|}$

$u(x,0)=\begin{cases}x^2 & |x|<\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases} \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \tilde{u}(\omega,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}x^2e^{-i\omega x}\,dx=H(\omega)$

$\xrightarrow{\text{از معادله تبدیل فوریه می‌گیریم}} \tilde{u}_t-9(-\omega^2\tilde{u})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}2te^{-|x|}e^{-i\omega x}\,dx=tK(\omega)$

$\Rightarrow \tilde{u}_t+9\omega^2\tilde{u}=tK(\omega)$ معادله خطی مرتبه اول $\Rightarrow \tilde{u}(\omega,t)=e^{-9\omega^2t}\left[\int e^{9\omega^2t}(tK(\omega))\,dt+a(\omega)\right]$

$\Rightarrow \tilde{u}(\omega,t)=e^{-9\omega^2t}\left[\frac{tK(\omega)}{9\omega^2}e^{9\omega^2t}-\frac{K(\omega)}{81\omega^4}e^{9\omega^2t}+a(\omega)\right]$

+	$tK(\omega)$	$e^{9\omega^2t}$
−	$K(\omega)$	$\frac{1}{9\omega^2}e^{9\omega^2t}$
+	0	$\frac{1}{81\omega^4}e^{9\omega^2t}$

$\Rightarrow \tilde{u}(\omega,t)=\frac{tK(\omega)}{9\omega^2}-\frac{K(\omega)}{81\omega^4}+a(\omega)e^{-9\omega^2t}$

$\Rightarrow \tilde{u}(\omega,0)=-\frac{K(\omega)}{81\omega^4}+a(\omega)=H(\omega)\Rightarrow \boxed{a(\omega)=H(\omega)+\frac{K(\omega)}{81\omega^4}}$

جواب خصوصی:

$\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه معکوس}} u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{tK(\omega)}{9\omega^2}-\frac{K(\omega)}{81\omega^4}+\left(H(\omega)+\frac{K(\omega)}{81\omega^4}\right)e^{-9\omega^2t}\right]e^{i\omega x}\,d\omega$

مثال: مسأله زیر را حل کنید؟ نکته: با توجه به بازه‌ها و معادله $u_{xx}+u_{yy}=0\ ,\ -\infty<y<\infty\ ,\ 0<x<\pi$

متوجه می‌شویم که معادله پتانسیل نامتناهی را باید حل کنیم ⇐ شرایط مرزی نداریم

$u(0,y)=e^{-|y|} \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \tilde{u}(0,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|y|}e^{-i\omega y}\,dy=H(\omega)$

$u_x(\pi,y)=\begin{cases}y^2 & |y|<\pi\\ 0 & |y|>\pi\end{cases} \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \tilde{u}_x(\pi,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}y^2e^{-i\omega y}\,dy$

$\xrightarrow{\text{از معادله تبدیل فوریه می‌گیریم}} \tilde{u}_{xx}+(-\omega^2\tilde{u})=0\Rightarrow\lambda^2-\omega^2=0\Rightarrow\lambda=\pm\omega$

$\Rightarrow \tilde{u}(x,\omega)=a(\omega)\cosh(\omega x)+b(\omega)\sinh(\omega x)+0$

Subject: Date:

تکنیک حل: از طرفین معادله و شرایط اولیه آن ، تبدیل فوریه نسبت به متغیر x می‌گیریم.

یادآوری:

$$f(x) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$\tilde{f}(\omega) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه معکوس}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

نکته:

1) $u(x,t) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \tilde{u}(\omega,t)$ 2) $u_t \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \tilde{u}_t$

3) $u_{tt} \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \tilde{u}_{tt}$ 4) $u_{xx} \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} -\omega^2 \tilde{u}$

مثال: مسأله زیر را حل کنید؟

$$u_{tt} - 4u_{xx} = \begin{cases} x^2 t & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

نکته: با توجه به بازه‌ها و معادله، متوجه می‌شویم که با یک معادله موج نامتناهی را حل کنیم ← شرایط مرزی نداریم

$$\begin{cases} u(x,0) = e^{-|x|} \longrightarrow \tilde{u}(\omega,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, e^{-i\omega x}\, dx = H(\omega) \\ u_t(x,0) = 0 \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \tilde{u}_t(\omega,0) = 0 \end{cases}$$

از معادله تبدیل فوریه $\longrightarrow \tilde{u}_{tt} - 4(-\omega^2\tilde{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} x^2 t\, e^{-i\omega x}\, dx = tK(\omega)$

$$\Rightarrow \tilde{u}_{tt} + 4\omega^2\tilde{u} = tK(\omega) \Rightarrow \lambda^2 + 4\omega^2 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm 2\omega i$$

$$\tilde{u}(\omega,t) = a(\omega)\cos(2\omega t) + b(\omega)\sin(2\omega t) + \frac{tK(\omega)}{4\omega^2} \quad (\star)$$

شرایط اولیه $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \tilde{u}(\omega,0) = \boxed{a(\omega) = H(\omega)} \\ \tilde{u}_t(\omega,0) = 2\omega b(\omega) + \frac{K(\omega)}{4\omega^2} = 0 \longrightarrow \boxed{b(\omega) = \frac{-K(\omega)}{8\omega^3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-i\omega}+\frac{1}{1+i\omega}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1+i\omega+1-i\omega}{1-i^2\omega^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)\Rightarrow \tilde{f}(\omega)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}$$

$i^2=-1$

نکته: اگر ابتدا تبدیل فوریه f سپس حاصل یک انتگرال خواسته شده باشد f از آن تبدیل فوریه f تبدیل فوریه معکوس می‌گیریم.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}e^{-i\omega x}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\omega x)-i\sin(\omega x)}{(1+\omega^2)}\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overbrace{\cos(\omega x)}^{\text{زوج}}}{\underbrace{1+\omega^2}_{\text{زوج}}}\,d\omega-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overbrace{\sin(\omega x)}^{\text{فرد}}}{\underbrace{1+\omega^2}_{\text{زوج}}}\,d\omega\right)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(\omega x)}{1+\omega^2}\,d\omega$$

نتیجه: $x=\ln 3\Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\omega\ln 3)}{1+\omega^2}\,d\omega=f(\ln 3)=\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\omega\ln 3)}{1+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{6}$

حل معادلات موج، گرما و پتانسیل نامتناهی به کمک تبدیل فوریه نامتناهی $(-\infty<x<+\infty)$:

معادله موج: $u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)$

شرایط مسأله موج نامتناهی:
$u(x,0)=f(x)$ ، $u_t(x,0)=g(x)$ } شرایط اولیه
شرایط مرزی نداریم

معادله گرما: $u_t-c^2u_{xx}=F(x,t)$

شرایط مسأله گرمای نامتناهی:
$u(x,0)=f(x)$ ⇐ شرایط اولیه
شرایط مرزی نداریم

معادله پتانسیل: $u_{xx}+u_{yy}=F(x,y)$

شرایط مسأله پتانسیل برای $-\infty<x<+\infty$:
$u(x,0)=f_1(x)$ یا $u_y(x,0)=f_1(x)$
$u(x,b)=f_2(x)$ یا $u_y(x,b)=f_2(x)$
شرایط مرزی نداریم

شرایط مسأله پتانسیل برای $-\infty<y<+\infty$:
$u(0,y)=g_1(y)$ یا $u_x(0,y)=g_1(y)$
$u(a,y)=g_2(y)$ یا $u_x(a,y)=g_2(y)$
شرایط مرزی نداریم

تبدیل فوریه سینوسی متناهی $(0 < x < +\infty)$:

انتگرال فوریه سینوسی

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^{+\infty} b(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega & (\star) \\ b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx \end{cases}$$

با جایگذاری مقدار $b(\omega)$ در رابطه $(*)$ داریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx\right)\sin(\omega x)\,d\omega$$

$$\tilde{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx$$ تبدیل فوریه سینوسی

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \tilde{f}_s(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega$$ تبدیل فوریه سینوسی معکوس

مثال: صورت مختلط تابع $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \quad (-1<x<1) \\ 0 & |x|>1 \quad (x>1 \text{ یا } x<-1)\end{cases}$ را بنویسید؟ و به کمک آن حاصل $\int_0^{+\infty}\frac{\sin w}{w}dw$ را بیابید؟

یادآوری: $e^{i\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)$, $e^{-i\theta}=(\cos\theta-i\sin\theta)$

$$C(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iwx}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-1}(0)e^{-iwx}dx+\int_{-1}^{1}(1)e^{-iwx}dx\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{-1}{iw}e^{-iwx}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{-1}{2\pi i w}\left(e^{-iw}-e^{iw}\right)=\frac{-1}{2\pi i w}\left(\cos(w)-i\sin(w)-\cos(w)-i\sin(w)\right)=\frac{\sin(w)}{\pi w}$$

($-2i\sin(w)$)

$$f(x)=\text{انتگرال فوریه}=\int_{-\infty}^{+\infty}C(w)e^{iwx}dw=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(w)}{w}e^{iwx}dw$$

به ازای $x=0 \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(w)}{w}dw=f(0)=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{\sin(w)}{w}}_{\text{زوج}}dw=\pi \Rightarrow 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(w)}{w}dw=\pi$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\sin(w)}{w}=\frac{\pi}{2}$$

تبدیل فوریه نامتناهی $(-\infty<x<+\infty)$:

$$\begin{cases}C(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iwx}dx \\ f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}C(w)e^{iwx}dw \quad (*)\end{cases}$$

با جایگذاری مقدار $C(w)$ در رابطه‌ی $(*)$ داریم:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iwx}dx\right)e^{iwx}dw=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iwx}dx\right)e^{iwx}dw$$

$$\begin{cases}\tilde{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iwx}dx & \text{تبدیل فوریه } f(x) \\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(w)e^{iwx}dw & \text{تبدیل فوریه معکوس}\end{cases}$$

Subject: .... Date: ....

مثال: درک انتگرال فوریه ثابت کنید:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin w}{w} \cos(wx)\, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

($x=1$ ← بررسی نقطه ناپیوستگی)

نکته: $f(x)$ تابعی در محدوده $0 < x < +\infty$ است. بنابراین، هم دارای انتگرال فوریه سینوسی و هم دارای انتگرال فوریه کسینوسی است و چون در طرف چپ تساوی، جمله $\cos(wx)$ وجود دارد، بنابراین باید انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ را بدست آوریم.

فرض می‌کنیم $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$ و ثابت می‌کنیم $a(w) = \frac{\sin w}{w}$:

$$a(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(wx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^1 \frac{\pi}{2}\cos(wx)\,dx + \int_1^{+\infty}(0)\cos(wx)\,dx\right) = \int_0^1 \cos(wx)\,dx$$

$$\Rightarrow a(w) = \frac{1}{w}\sin(wx)\Big|_0^1 \Rightarrow a(w) = \frac{\sin(w)}{w}$$

ناپیوسته $\boxed{x=1} \Rightarrow$ حاصل انتگرال سری فوریه کسینوسی $= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 1^+} f(x) + \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

صورت مختلط انتگرال فوریه:

صورت مختلط انتگرال فوریه: $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(w)\, e^{iwx}\, dw$

$$c(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx}\, dx$$

Subject: (۱۱)   Date:

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}(0)\sin(\omega x)\,dx+\int_{0}^{+\infty}\pi e^{-x}\sin(\omega x)\,dx\right)=\int_{0}^{+\infty}e^{-x}\sin(\omega x)\,dx$$

$$\Rightarrow b(\omega)=\frac{-e^{-x}\sin(\omega x)-\omega e^{-x}\cos(\omega x)}{1-(-\omega^2)}\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{\omega}{1+\omega^2}\Rightarrow b(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

+	$\sin(\omega x)$	e^{-x}
−	$\omega\cos(\omega x)$	$-e^{-x}$
+	$-\omega^2\sin(\omega x)$	e^{-x}

ناپیوسته $x=0$ — حاصل انتگرال فوریه $=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0^+}f(x)+\lim_{x\to 0^-}f(x)\right)=\frac{1}{2}(\pi e^{0}-0)=\frac{\pi}{2}$

③ مثال: جمله انتگرال فوریه ثابت کنید؟

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}\cos(\omega x)\,d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\quad (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\quad (x>\frac{\pi}{2} \text{ یا } x<-\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

فرض می‌کنیم $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ و ثابت می‌کنیم ، $a(\omega)=\frac{\cos(\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}$

زوج $f(x)\Rightarrow a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\cos x\cos(\omega x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}0\cos(\omega x)\,dx\right)$

$$\Rightarrow a(\omega)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos(\omega x)\,dx=\frac{\sin x\cos(\omega x)-\omega\cos x\sin(\omega x)}{1-\omega^2}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

+	$\cos(\omega x)$	$\cos x$
−	$-\omega\sin(\omega x)$	$\sin x$
+	$-\omega^2\cos(\omega x)$	$-\cos x$

$$\Rightarrow a(\omega)=\frac{\cos(\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}$$

نکته برای مثال ۱ و ۳: اگر از یک نقطه روی نمودار ، به محورها عمود کنیم و به همون اندازه امتداد بدیم

اگر به یک نقطه از نمودار برسیم یعنی زوج و در غیر اینصورت فرد.

- یه نقطه از نمودار را مشخص می‌کنیم و از اون نقطه به مبدأ رسم می‌کنیم و به همون اندازه امتداد می‌دهیم

اگر به نقطه‌ای از نمودار برسد ، فرد و در غیر اینصورت زوج.

Date:

بسط نیم‌دامنه: فرض کنید $f(x)$ تابعی در محدوده $(0,+\infty)$ یا $0<x<+\infty$ که باشد ...

انتگرال فوریه سینوسی $= \int_0^{+\infty} b(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega$, $b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx$

انتگرال فوریه کسینوسی $= \int_0^{+\infty} a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$, $a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$

① **مثال:** انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} x & |x|<\pi \quad (-\pi<x<\pi) \\ 0 & |x|>\pi \quad (x>\pi \text{ یا } x<-\pi) \end{cases}$ را بنویسید؟

$(\omega)=0 \Rightarrow b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\sin(\omega x)\,dx+\int_{\pi}^{+\infty} 0\,(\sin(\omega x))\,dx\right)$

$\ldots n(\omega x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-x}{\omega}\cos(\omega x)+\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega x)\right)_0^{\pi}$

+	x	$\sin(\omega x)$
−	1	$\frac{-1}{\omega}\cos(\omega x)$
+	0	$\frac{-1}{\omega^2}\sin(\omega x)$

$\ldots s(\omega\pi)+\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega\pi)\Big)$

$\ldots\infty$

$\ldots b(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi}{\omega}\cos(\omega\pi)+\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega\pi)\right)\sin(\omega x)\,d\omega$

مثال: جهت انتگرال فوریه ثابت کنید:

$\ldots\frac{\omega}{1+\omega^2}\sin(\omega x)\Big)d\omega=\begin{cases}\pi e^{-x} & x>0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0 \\ 0 & x<0\end{cases}$ بررسی در نقطه ناپیوستگی

$\frac{\omega}{1+\omega^2}$ فرض می‌کنیم تابع $f(x)=\begin{cases}\pi e^{-x} & x>0 \\ 0 & x<0\end{cases}$ را می‌سازیم

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}(0)\cos(\omega x)\,dx+\int_0^{+\infty}\pi e^{-x}\cos(\omega x)\,dx$

Subject: (۱۰) Date:

انتگرال فوریه: فرض کنید $f(x)$ تابعی در محدوده $-\infty < x < +\infty$ باشد، در این صورت:

$$f(x) = \text{انتگرال فوریه} = \int_0^{+\infty} \left(a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin(\omega x)\right) d\omega$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\, dx \quad , \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\, dx$$

انتگرال فوریه توابع زوج و فرد:

$f(x)$ تابع فرد $\Rightarrow$

$$\begin{cases} b(\omega) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\, dx \quad , \quad a(\omega) = 0 \\ \text{انتگرال فوریه } f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} b(\omega)\sin(\omega x)\, d\omega \end{cases}$$

$f(x)$ تابع زوج $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a(\omega) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\, dx \quad , \quad b(\omega) = 0 \\ \text{انتگرال فوریه } f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} a(\omega)\cos(\omega x)\, d\omega \end{cases}$$

* $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد $\Rightarrow$ حاصل انتگرال فوریه در x_0 $= f(x_0)$

* $f(x)$ در x_0 ناپیوسته باشد $\Rightarrow$ حاصل انتگرال فوریه در x_0 $= \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x)\right)$

Subject: ______________ Date: ______________

مثال ۶: مسأله زیر را حل کنید؟

$$U_{xx}+U_{yy}=2x-y$$

$U(x,0)=x+1$, $U_y(x,\pi)=2x$ } ج ① شرایط مرزی ناهمگن ($0<l=\pi$)

$U_x(0,y)=y$, $U_x(\pi,y)=1-y$ } زوج ② شرایط اولیه

۱) هیچ کدام همگن نیست ⇐ ۲) زوج ج ۱ را انتخاب می‌کنیم مرزی را از زوج ج ②

G دارد ⇐ W برحسب y و G_n برحسب x (با توجه به شرایط مرزی، هر دو مشتق دارد)

$$V_{xx}+V_{yy}=?\ 2x-y \quad \Rightarrow U(x,y)=V(x,y)+ay+b$$

$V(x,0)=0$, $V_y(x,\pi)=0$ } شرایط مرزی همگن

$$\Rightarrow U(x,0)=V(x,0)+b \Rightarrow b=x+1$$

$$\Rightarrow U_y(x,y)=V_y(x,y)+a \Rightarrow U_y(x,\pi)=V_y(x,\pi)+a \Rightarrow a=2x$$

$V_x(0,y)=?\ -y-1$ $\quad \Rightarrow U(x,y)=V(x,y)+2xy+x+1$

$V_x(\pi,y)=?\ -3y$ $\quad \Rightarrow U_x(x,y)=V_x(x,y)+2y+1 \Rightarrow U_{xx}=V_{xx},\ U_{yy}=V_{yy} \Rightarrow V_{xx}+V_{yy}=2x-y$

$$\Rightarrow U_x(0,y)=V_x(0,y)+2y+1 \Rightarrow V_x(0,y)=-y-1$$

$$\Rightarrow U_x(\pi,y)=V_x(\pi,y)+2y+1 \Rightarrow V_x(\pi,y)=-3y$$

فرم جواب: $V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(x)\sin\left(\frac{(2n-1)y}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(x)\sin(\alpha_n y)$

$$\Rightarrow V_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}G_n''(x)\sin(\alpha_n y)$$

$$\Rightarrow V_{yy}=\sum_{n=1}^{\infty}-\alpha_n^2 G_n(x)\sin(\alpha_n y)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}G_n''(x)\sin(\alpha_n y)-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 G_n(x)\sin(\alpha_n y)=2x-y$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(G_n''(x)-\alpha_n^2 G_n(x)\right)\sin(\alpha_n y)=2x-y \quad \text{سری فوریه سینوسی}$$

$$\Rightarrow G_n''(x)-\alpha_n^2 G_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x-y)\sin(\alpha_n y)\,dy=\underbrace{\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin(\alpha_n y)\,dy}_{xH_n}-\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y\sin(\alpha_n y)\,dy}_{K_n}$$

$$\Rightarrow G_n''(x)-\alpha_n^2 G_n(x)=xH_n-K_n \quad \text{معادله خطی مرتبه دوم}$$

$$\lambda^2-\alpha_n^2=0 \Rightarrow \lambda=\pm\alpha_n \quad \text{دو ریشه قرینه} \Rightarrow G_n(x)=a_n\cosh(\alpha_n x)+b_n\sinh(\alpha_n x)+\frac{xH_n-K_n}{-\alpha_n^2}$$

$$\Rightarrow \text{فرم جواب}: V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cosh(\alpha_n x)+b_n\sinh(\alpha_n x)+\frac{xH_n-K_n}{-\alpha_n^2}\right)\sin(\alpha_n y)$$

$$V_x(x,y)=\sum\left(a_n\alpha_n\sinh(\alpha_n x)+b_n\alpha_n\cosh(\alpha_n x)-\frac{H_n}{\alpha_n^2}\right)\sin(\alpha_n y)$$

$$V_x(0,y)=-y-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\alpha_n-\frac{H_n}{\alpha_n^2}\right)\sin(\alpha_n y)=-y-1 \quad \text{سری فوریه سینوسی} \Rightarrow b_n\alpha_n-\frac{H_n}{\alpha_n^2}=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-y-1)\sin(\alpha_n y)\,dy}_{P_n}$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{P_n+\frac{H_n}{\alpha_n^2}}{\alpha_n}$$

$$V_x(\pi,y)=-3y \Rightarrow \sum\left(a_n\alpha_n\sinh(\alpha_n\pi)+\frac{P_n+\frac{H_n}{\alpha_n^2}}{\alpha_n}\alpha_n\cosh(\alpha_n\pi)-\frac{H_n}{\alpha_n^2}\right)\sin(\alpha_n y)=-3y \quad \text{سری فوریه سینوسی} \ \bigstar$$

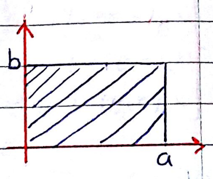
$$\Rightarrow \bigstar=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}-3y\sin(\alpha_n y)\,dy}_{Q_n} \Rightarrow a_n=\frac{Q_n+\frac{H_n}{\alpha_n^2}-\left(P_n+\frac{H_n}{\alpha_n^2}\right)\cosh(\alpha_n\pi)}{\alpha_n\sinh(\alpha_n\pi)}$$

حل معادله پتانسیل دو بعدی روی صفحه مستطیل: $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$

همه شرایط مرزی:

$u(x,0)=f_1(x)$ یا $u_y(x,0)=f_1(x)$ } زوج ①
$u(x,b)=f_2(x)$ یا $u_y(x,b)=f_2(x)$

$u(0,y)=g_1(y)$ یا $u_x(0,y)=g_1(y)$ } زوج ②
$u(a,y)=g_2(y)$ یا $u_x(a,y)=g_2(y)$



تکنیک حل: یکی از دو زوج ۱ یا ۲ را به عنوان شرایط مرزی و زوج دیگر را شرایط اولیه فرض می‌کنیم و مسأله را همانند مسائل موج حل می‌کنیم.

نکته مهم: اگر زوج ۲ (y داره) را شرایط مرزی انتخاب کنیم، آنگاه W تابعی برحسب x و تابع مجهول G_x در فرم جواب، تابعی برحسب y می‌باشد. چنانچه زوج ۱ را شرایط مرزی انتخاب کنیم، آنگاه W تابعی برحسب y و تابع مجهول G_x در فرم جواب تابعی برحسب x می‌باشد.

نکته مهم: اولویت‌ها انتخاب یکی از دو زوج به عنوان شرایط مرزی:

۱) همگن باشد

۲) فرم جواب آن G نداشته باشد (یعنی یکی از دو زوج، جنسشون مشتق نداشته باشد)

Subject: Date:

$\Rightarrow \dot{G}_n(t) + 9\alpha_n^2 G_n(t) = tH_n + K_n$ معادله خطی مرتبه اول

یادآوری: $\dot{y} + p(t)y = q(t)$ خطی مرتبه اول $\to y = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt} q(t)\,dt + c\right]$

$\to G_n(t) = e^{-\int 9\alpha_n^2 dt}\int e^{\int 9\alpha_n^2 dt}(tH_n + K_n)\,dt$

+	$tH_n + K_n$	$e^{9\alpha_n^2 t}$
−	H_n	$\frac{1}{9\alpha_n^2} e^{9\alpha_n^2 t}$
+	0	$\frac{1}{81\alpha_n^4} e^{9\alpha_n^2 t}$

$\to G_n(t) = e^{-9\alpha_n^2 t}\left[\frac{tH_n + K_n}{9\alpha_n^2} e^{9\alpha_n^2 t} - \frac{H_n}{81\alpha_n^4} + a_n\right]$

$\Rightarrow G_n(t) = \frac{tH_n + K_n}{9\alpha_n^2} - \frac{H_n}{81\alpha_n^4} e^{-9\alpha_n^2} + a_n e^{-9\alpha_n^2 t}$

جواب عمومی: $V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{tH_n + K_n}{9\alpha_n^2} - \frac{H_n}{81\alpha_n^4} + a_n e^{-9\alpha_n^2 t}\right]\cos(\alpha_n x)$

با توجه به شرایط اولیه $\to V(x,0) = x - 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{K_n}{9\alpha_n^2} - \frac{H_n}{81\alpha_n^4} + a_n\right]\cos(\alpha_n x) = x - 1$ بسط فوریه کسینوسی

$\Rightarrow \frac{K_n}{9\alpha_n^2} - \frac{H_n}{81\alpha_n^4} + a_n = \underbrace{\frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)\cos(\alpha_n x)\,dx}_{P_n} \Rightarrow \boxed{a_n = P_n - \frac{K_n}{9\alpha_n^2} + \frac{H_n}{81\alpha_n^4}}$

معادله پتانسیل: به شکل $\nabla^2 u = f$ می باشد. اگر u تابعی دو متغیره از x و y باشد، داریم

$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$ زیرا:

$\vec{\nabla u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$

$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

اگر u تابعی ۳ متغیره باشد آنگاه:

$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

Subject: (۸)　　　　　　　　　　Date:

مسائل انتقال گرما در میله متناهی حل خواهد شد، مثل آن که شرایط زیر در مسئله، داده شده باشد:

شرایط مسئله گرمای متناهی:

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) & \text{شرایط اولیه} \Leftarrow \text{دمای اولیه} \\ u(0,t)=p(t) \ \text{یا}\ u_x(0,t)=p(t) & \text{دمای ابتدای میله یا شیب دما در ابتدای میله} \\ u(L,t)=q(t) \ \text{یا}\ u_x(L,t)=q(t) & \text{دمای انتهای میله یا شیب دما در انتهای میله} \end{cases}$$

(شرایط مرزی میله)

حل مسئله گرما همانند حل مسئله موج می باشد.

مثال: مسئله زیر را حل کنید؟

$$u_t-9u_{xx}=xt \qquad\qquad V_t-9V_{xx}=?\,xt-x+3$$

$$\begin{cases} u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=t \\ u(2,t)=1-t \quad (L=2) \end{cases} \text{شرایط مرزی ناهمگن} \qquad \begin{cases} V(x,0)=?\,x-1 \\ V_x(0,t)=0 \\ V(2,t)=0 \end{cases} \text{شرایط مرزی همگن}$$

$$u(x,t)=V(x,t)+ax+b \Rightarrow \underbrace{u(2,t)}_{1-t}=\underbrace{V(2,t)}_{0}+2t+b \Rightarrow b=1-3t$$

$$u_x(x,t)=V_x(x,t)+a \Rightarrow \underbrace{u_x(0,t)}_{t}=\underbrace{V_x(0,t)}_{0}+a \Rightarrow a=t$$

$$\boxed{u(x,t)=V(x,t)+tx+(1-3t)} \longrightarrow \underbrace{u(x,0)}_{x}=V(x,0)+1 \Rightarrow V(x,0)=x-1$$

$$u_t=V_t+x-3,\ u_{xx}=V_{xx} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} V_t+x-3-9V_{xx}=xt \Rightarrow V_t-9V_{xx}=xt-x+3$$

فرم جواب: $V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\cos(\alpha_n x)$

$$V_t=\sum_{n=1}^{\infty}\dot G_n(t)\cos(\alpha_n x),\quad V_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}-\alpha_n^2 G_n(t)\cos(\alpha_n x) \xrightarrow{V_t-9V_{xx}=xt-x+3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\dot G_n(t)\cos(\alpha_n x)+\sum_{n=1}^{\infty}9\alpha_n^2 G_n(t)\cos(\alpha_n x)=xt-x+3$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dot G_n(t)+9\alpha_n^2 G_n(t)\right)\cos(\alpha_n x)=xt-x+3$$ سری فوریه کسینوسی

$$\dot G_n(t)+9\alpha_n^2 G_n(t)=\frac{2}{2}\int_0^2 (xt-x+3)\cos(\alpha_n x)\,dx=\underbrace{t\int_0^2 x\cos(\alpha_n x)\,dx}_{tH_n}+\underbrace{\int(-x+3)\cos(\alpha_n x)\,dx}_{K_n}$$

Subject: Date:

$u_{tt} = 4u_{xx}$ $\qquad\qquad$ $V_{tt} - 4V_{xx} = ? - x^2 + 2x + 4t^2$

$$\begin{cases} u(x,0) = x^2 \\ u_t(x,0) = 0 \\ u_x(0,t) = -t^2 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

(for $u_x(0,t)$ and $u_x(1,t)$:) شرایط مرزی ناهمگن

($u_x(1,t)$, 1 →) $L = 1$

$$\begin{cases} V(x,0) = ?\, x^2 \\ V_t(x,0) = ?\, 0 \\ V_x(0,t) = 0 \\ V_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

$u(x,t) = V(x,t) + ax^2 + bx \Rightarrow u_x(x,t) = V_x(x,t) + 2ax + b \quad (\Delta)$

$u_x(0,t) = V_x(0,t) + b \Rightarrow b = -t^2$ (with $u_x(0,t) = -t^2$ and $V_x(0,t) = 0$)

$u_x(1,t) = V_x(1,t) + 2a + b \Rightarrow a = \frac{t^2}{2}$ (with $u_x(1,t) = 0$, $V_x(1,t) = 0$ and $b = -t^2$)

$$\boxed{u(x,t) = V(x,t) + \frac{t^2}{2}x^2 - t^2 x}$$

$\Rightarrow$

$u_t(x,t) = V_t(x,t) + tx^2 - 2tx \quad (\Theta)$

$\Rightarrow u_t(x,0) = V_t(x,0) \Rightarrow V_t(x,0) = 0$ (since $u_t(x,0) = 0$)

$u(x,0) = V(x,0) \Rightarrow V(x,0) = x^2$ (since $u(x,0) = x^2$)

(Θ) $u_{tt} = V_{tt} + x^2 - 2x$

(Δ) $u_{xx} = V_{xx} + t^2$

$\Rightarrow u_{tt} - 4u_{xx} = V_{tt} + x^2 - 2x - 4V_{xx} - 4t^2 = 0$

$\Rightarrow V_{tt} - 4V_{xx} = -x^2 + 2x + 4t^2$

در ادامه با شرح حل مسأله با شرط مرزی همگن حل می‌شود $\Rightarrow$ فرم جواب: $V(x,t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(n\pi x)$

معادله‌ی گرما (حرارت):

$u_t - c^2 u_{xx} = F(x,t)$

حل مسأله انتقال دما در میله متناهی $(0 < x < L)$: میله‌ای به طول L را عایق‌پوش می‌کنیم، به طوری که فقط از دو سر خود، تبادل گرما نماید. این میله را بر روی محور xها در محدوده‌ی $0 < x < L$ قرار می‌دهیم. در این صورت پس از حل مسأله گرما، $u(x,t)$ دمای نقطه‌ی x از میله نسبت به زمان t را نشان می‌دهد.

با توجه به شرایط مرزی در مسأله، مجهولات a و b را به دست می‌آوریم. سپس جهت رابطه (★) به دست آمده، شرایط مجهول مسأله V را محاسبه می‌کنیم و با تشکیل فرم جواب مسأله، V را حل می‌کنیم.

مثال: مسأله زیر را حل کنید؟

1) $u_{tt}-9u_{xx}=xt$ $\qquad$ $V_{tt}-9V_{xx}=?\; xt+\frac{2}{\pi}x-2$

$$\begin{cases} u(x,0)=|x| \\ u_t(x,0)=2 \\ u(0,t)=t^2-2t \\ u(\pi,t)=t+1 \end{cases}$$

شرایط مرزی ناهمگن — ($L=\pi$)

$$\begin{cases} V(x,0)=?\; |x|-\frac{1}{\pi}x \\ V_t(x,0)=?\; -\frac{3}{\pi}x+4 \\ V(0,t)=0 \\ V(\pi,t)=0 \end{cases}$$

شرایط مرزی همگن

$$u(x,t)=V(x,t)+ax+b \Rightarrow \underbrace{u(0,t)}_{t^2-2t}=\underbrace{V(0,t)}_{0}+b \Rightarrow b=t^2-2t$$

$$\Downarrow\ \underbrace{u(\pi,t)}_{t+1}=\underbrace{V(\pi,t)}_{0}+a\pi+\underbrace{b}_{t^2-2t} \Rightarrow a=\frac{-t^2+3t+1}{\pi}$$

(★) $\Rightarrow \boxed{u(x,t)=V(x,t)+\frac{-t^2+3t+1}{\pi}x+(t^2-2t)}$

$$\underbrace{u(x,0)}_{|x|}=V(x,0)+\frac{1}{\pi}x \Rightarrow V(x,0)=|x|-\frac{1}{\pi}x$$

$$u_t(x,t)=V_t(x,t)+\frac{1}{\pi}(-2t+3)x+(2t-2) \Rightarrow \underbrace{u_t(x,0)}_{2}=V_t(x,0)+\frac{3}{\pi}x-2 \Rightarrow V_t(x,0)=-\frac{3}{\pi}x+4$$

$$\Downarrow\ u_{tt}=V_{tt}-\frac{2}{\pi}x+2$$

$$u_x=V_x+\frac{-t^2+3t+1}{\pi} \Rightarrow u_{xx}=V_{xx}$$

جایگذاری در معادله $\Rightarrow u_{tt}-9u_{xx}=V_{tt}-\frac{2}{\pi}x+2-9V_{xx}=xt \Rightarrow V_{tt}-9V_{xx}=xt+\frac{2}{\pi}x-2$

فرم جواب: $V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin(nx)$

حال همانند حل مسأله با شرایط مرزی همگن حل می‌کنیم

NAHAL

Subject: Date:

یادآوری: $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=f(x) \Leftarrow$ سری فوریه کسینوسی

$\Rightarrow a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \Rightarrow \frac{1}{2}a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$

$\ddot{G}_0(t)=\frac{1}{1}\int_0^1 x^2 t\,dx \Rightarrow \ddot{G}_0(t)=t\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \Rightarrow \ddot{G}_0(t)=\frac{1}{3}t \xrightarrow{S} \dot{G}_0(t)=\frac{1}{6}t^2+a_0$

$\xrightarrow{S} \boxed{G_0(t)=\frac{1}{18}t^3+a_0t+b_0}$

جواب عمومی مسأله:

$u(x,t)=G_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\cos(n\pi x)=\frac{1}{18}t^3+a_0t+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(3n\pi t)+b_n\sin(3n\pi t)+\frac{tH_n}{9n^2\pi^2}\right)\cos(n\pi x)$

$u(x,0)=x \Rightarrow b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)\cos(n\pi x)=x$ سری فوریه کسینوسی $\Rightarrow \begin{cases} a_n=2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx \\ b_0=\frac{1}{1}\int_0^1 x\,dx \Rightarrow b_0=\frac{1}{2} \end{cases}$

$u_t(x,0)=0 \Rightarrow a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(3n\pi b_n+\frac{H_n}{9n^2\pi^2}\right)\cos(n\pi x)=0$ سری فوریه کسینوسی $\Rightarrow \begin{cases} 3n\pi b_n+\frac{H_n}{9n^2\pi^2}=0 \Rightarrow b_n=\frac{-H_n}{27n^3\pi^3} \\ a_0=0 \end{cases}$

حل مسأله موج با شرایط مرزی ناهمگن: ابتدا یک مسأله موج جدید برحسب V طراحی می کنیم و شرایط مرزی آن را همگن فرض می کنیم و بقیه شرایط آن را مجهول می گیریم. سپس فرض می کنیم $u(x,t)=V(x,t)+W(x,t)$ که $W(x,t)$ را با توجه به شرایط مرزی که به یکی از ۴ شکل زیر انتخاب می کنیم:

$\begin{cases} u(0,t)=p(t) \\ u(L,t)=q(t) \end{cases}$ یا $\begin{cases} u(0,t)=p(t) \\ u_x(L,t)=q(t) \end{cases}$ یا $\begin{cases} u_x(0,t)=p(t) \\ u(L,t)=q(t) \end{cases} \Rightarrow W(x,t)=ax+b$

$\begin{cases} u_x(0,t)=p(t) \\ u_x(L,t)=q(t) \end{cases} \Rightarrow W(x,t)=ax^2+bx$

۶

Subject: Date:

حال با کمک شرایط اولیه مجهولات a_n و b_n را بدست می‌آوریم و در جواب عمومی جایگذاری می‌کنیم

تا جواب خصوصی بدست بیاید:

$$U(x,0)=x^2 \Rightarrow u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{H_n}{4n^2}\right)\sin(nx) \Rightarrow$$ سری فوریه سینوسی

$$\Rightarrow a_n+\frac{H_n}{4n^2}=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(nx)\,dx}_{P_n} \Rightarrow a_n=P_n-\frac{H_n}{4n^2}$$

$$U_t(x,0)=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(2nb_n+\frac{K_n}{4n^2}\right)\sin(nx)=2 \Rightarrow$$ سری فوریه سینوسی

$$2nb_n+\frac{K_n}{4n^2}=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin(nx)\,dx}_{Q_n} \Rightarrow b_n=\frac{Q_n-\frac{K_n}{4n^2}}{2n}$$

Subject: ________ Date: ________

مثال ۶: مسأله زیر را حل کنید؟ $u_{tt}-4u_{xx}=2x^2+3xt-5$

با توجه به شرایط مرزی همگن داریم:

$$\begin{cases} u(x,0)=x^2 \\ u_t(x,0)=2 \end{cases} \text{شرایط اولیه}$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=0 \end{cases} \text{شرایط مرزی همگن} \quad L=\pi$$

فرم جواب: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(nx) \Rightarrow$

$u_{tt}=\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t)\sin(nx)$

$u_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(t)\sin(nx)$

$$u_{tt}-4u_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{G}_n(t)\sin(nx)+4\sum_{n=1}^{\infty}n^2G_n(t)\sin(nx)=2x^2+3xt-5$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{G}_n(t)+4n^2G_n(t)\right)\sin(nx)=2x^2+3xt-5 \Leftarrow \text{سری فوریه سینوسی}$$

یادآوری: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)=f(x)$ سری فوریه سینوسی $\Rightarrow b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$

$$\Rightarrow \ddot{G}_n(t)+4n^2G_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x^2+3xt-5)\sin(nx)\,dx=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x^2-5)\sin(nx)dx}_{H_n}+\underbrace{\frac{2}{\pi}t\int_0^{\pi}\ldots}_{tK_n}$$

$$\Rightarrow \ddot{G}_n(t)+4n^2G_n(t)=H_n+tK_n$$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ (X)

$$\Rightarrow \lambda^2+4n^2=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2ni \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0 \\ \beta=2n\end{cases} \Rightarrow G_n(t)=a_n\cos(2nt)+b_n\sin(2nt)+G_n^*$$ ***

نکته: اگر طرف دوم معادله t نداشت یا اینکه توان t یک بود، برای محاسبه $G_n^*(t)$ می‌توانیم طرف دوم معادله را بر ضریب $G_n(t)$ تقسیم کنیم یعنی در اینجا:

$$G_n^*(t)=\frac{H_n+tK_n}{4n^2}$$

جواب عمومی مسأله:

$$*\ u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(2nt)+b_n\sin(2nt)+\frac{H_n+tK_n}{4n^2}\right)\sin(nx)$$

NAHAL

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(L,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{فرم جواب}: u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}x\right)$$

$$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{فرم جواب}: u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}x\right)$$

سپس با صدق دادن فرم جواب در معادله موج، تابع مجهول $G_n(t)$ و در حالت دوم $G_0(t)$ را نیز بدست می‌آوریم.

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت $\Leftarrow$ یادآوری: $\ddot{y}+a\dot{y}+by=f(t)$ ($y''=\ddot{y}$)

یادآوری: $\lambda^2+a\lambda+b=0$ معادله مشخصه $\qquad y^*=y_p$

1) $\Delta>0 \Rightarrow$ معادله مشخصه دو ریشه حقیقی متمایز λ_1 و λ_2 دارد. $\Rightarrow y=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+y^*$

حالت خاص: $\lambda_1=-\lambda_2$ (در حل معادله پتانسیل) دو ریشه قرینه $\Rightarrow y=c_1\cosh(\lambda_1 t)+c_2\sinh(\lambda_1 t)+y^*$

2) $\Delta=0 \Rightarrow$ معادله مشخصه یک ریشه مضاعف λ دارد $\Rightarrow y=c_1e^{\lambda t}+c_2te^{\lambda t}+y^*$

3) $\Delta<0 \Rightarrow$ (در حل معادله موج) معادله مشخصه دو ریشه مختلط $\alpha\pm i\beta$ دارد $\Rightarrow y=c_1e^{\alpha t}\cos(\beta t)+c_2e^{\alpha t}\sin(\beta t)+y^*$

$y^*=y_p$ یک جواب خصوصی معادله است.

Subject .... Date: ....

مسئله ارتعاش متناهی حل نخواهد شد، مگر اینکه شرایط زیر، برای مسئله داده شده باشد

شرایط اولیه:

- مکان اولیه ارتعاش $\Leftarrow$ $u(x,0)=f(x)$
- سرعت اولیه ارتعاش $\Leftarrow$ $u_t(x,0)=g(x)$

شرایط مرزی:

- مکان ابتدای ارتعاش یا شیب مکان در ابتدای ارتعاش $\Leftarrow$ $u(0,t)=p(t)$ یا $u_x(0,t)=p(t)$
- مکان انتهای ارتعاش یا شیب مکان در انتهای ارتعاش $\Leftarrow$ $u(L,t)=q(t)$ یا $u_x(L,t)=q(t)$

نکته: هرگاه $p(t)$ و $q(t)$ هر دو باهم صفر باشند، شرایط مرزی مسأله موج را همگن گو[یند]

و اگر حداقل یکی از $p(t)$ یا $q(t)$ مخالف صفر باشد، شرایط مرزی مسأله موج را ناهمگن گویند

حل مسأله موج با شرایط مرزی همگن: با توجه به شرایط مرزی، فرم جواب مسأله را به یکی

از چهار شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{فرم جواب: } u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

$$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(L,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{فرم جواب: } u(x,t)=G_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Subject: Date:

مثال: سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 1 & 1<x<3 \end{cases}$ را بنویسید.

$L=3$

+	x	$\cos(\frac{n\pi}{3}x)$
−	1	$\frac{3}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{3}x)$
+	0	$-\frac{9}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi}{3}x)$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos(\frac{n\pi}{3}x)\,dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^1 x\cos(\frac{n\pi}{3}x)\,dx+\int_1^3\cos(\frac{n\pi}{3}x)\,dx\right) \circledast$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{3x}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{3}x)+\frac{9}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi}{3}x)\right)\Big|_0^1+\frac{3}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{3}x)\Big|_1^3\right]=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{3})+\frac{9}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi}{3})\right.$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{3})+\frac{9}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi}{3})-\frac{9}{n^2\pi^2}+\frac{3}{n\pi}\sin(n\pi)-\frac{3}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{3})\right)=\frac{6}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi}{3})-\frac{6}{n^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\cos(\frac{n\pi}{3})-1\right)\quad n\neq 0 \overset{\circledast}{\Longrightarrow} a_0=\frac{2}{3}\left(\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 dx\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_1^3\right)=\frac{5}{3}$$

سری فوریه کسینوسی $f(x)$ $=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi}{L}x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}+\sum\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\cos(\frac{n\pi}{3})-1\right)\cos(\frac{n\pi}{3}x)$

نکته:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$$

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$

معادله موج (ارتعاش): $u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)$ که در آن $u(x,t)$ تابع مجهول است.

حل مسئله موج متناهی ($0\leq x\leq L$): منحنی به طول L را بر روی محور xها در محدوده بین 0 تا L قرار می‌دهیم. این نخ را از وضعیت اولیه خود خارج نموده و آن را رها می‌کنیم. در این صورت پس از حل معادله موج $u(x,t)$ مکان نقطه x از نخ نسبت به زمان t را نشان می‌دهد.

Subject: Date:

مثال: سری فوریه $f(x)=|x|$ $-\pi<x<\pi$ را بنویسید و به کمک آن حاصل سری

$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots$ را بیابید؟ (A)

$P=2\pi \Rightarrow L=\frac{P}{2} \Rightarrow L=\pi$

زوج: $f(x) \Rightarrow b_n=0 \Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx$ (★)

+	x	$\cos(nx)$
−	1	$\frac{1}{n}\sin(nx)$
+	0	$-\frac{1}{n^2}\cos(nx)$

$\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)+\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)$ $n\neq 0$ $\overset{(★)}{\Rightarrow} a_0=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi$

سری فوریه $f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\cos(nx)$

$\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\left(-2\cos x-\frac{2}{3^2}\cos 3x-\frac{2}{5^2}\cos 5x-\dots\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\dots\right)$

$x=0 \overset{\text{پیوسته}}{\Longrightarrow} \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\underbrace{\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots\right)}_{A}=f(0)=0 \Rightarrow A=\frac{\pi^2}{8}$

بسط نیم دامنه ای (سری فوریه سینوسی یا کسینوسی): تابع $f(x)$ در محدوده $0<x<L$ تعریف شده

دارد که سری فوریه آن را به شکل زیر می توان نوشت:

1) سری فوریه سینوسی = سری فوریه $f(x)$ فرد $=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

2) سری فوریه کسینوسی = سری فوریه $f(x)$ زوج $=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

$$\Rightarrow b_n=\frac{\frac{-n\pi}{2}}{\frac{4+n^2\pi^2}{4}}\left(e^{2}(-1)^n-e^{-2}(-1)^n\right)=\frac{-n\pi(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\underbrace{\left(e^{2}-e^{-2}\right)}_{2\sinh 2}\Rightarrow b_n=\frac{-2n\pi(-1)^n}{2+n^2\pi^2}\sinh(2)$$

$$f(x) \text{ سری فوریه } =\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sinh(2)+\sum\frac{4(-1)^n\sinh(2)}{4+n^2\pi^2}\cos(n\pi x)+\frac{-2n\pi(-1)^n\sinh(2)}{4+n^2\pi^2}\sin(n\pi x)$$

سوال: آیا حاصل سری فوریه $f(x)$ در نقطه x_0 با $f(x_0)$ برابر است؟ خیر همیشه برقرار نیست و قضیه زیر به این سوال پاسخ می دهد.

* هر وقت در صورت سوال سری باز بود (یعنی جمع چندین عدد را داشتیم) مانند: سری فوریه تابع $f(x)$ را بازمی کنیم تا ببینیم به ازای چه مقدار x صورت سوال را می دهد.

قضیه همگرایی سری فوریه: فرض کنید $f(x)$ متناوب با دوره تناوب $p=2L$ باشد و همچنین $f(x)$ در محدوده $-L<x<L$ تکه ای هموار باشد در اینصورت:

$$x_0 \text{ حاصل سری فوریه } f(x) \text{ در نقطه ناپیوسته } =\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)+\lim_{x\to x_0^-}f(x)\right)$$

فرض کنید $f(x)$ در نقطه x_0 پیوسته باشد یعنی $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ در اینصورت:

$$x_0 \text{ حاصل سری فوریه } f(x) \text{ در نقطه پیوسته } =f(x_0)$$

۱) x را باید چنین انتخاب کنیم تا معادله خواسته شده به دست آید
۲) x به دست آمده را باید در دامنه f ببینیم پیوسته است یا ناپیوسته
۳) قضیه همگرایی سری فوریه = سری فوریه $f(x)$

مثال: سری فوریه تابع $f(x)=x^2$ ، $-1<x<1$ را بنویسید و به کمک آن حاصل سری های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ را بدست آورید؟

$$\text{(صفحه قبل)} \Rightarrow f(x) \text{ سری فوریه } =\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x)$$

$$x=0 \text{ پیوسته} \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=f(0)=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{-\pi^2}{12}$$

$$x=1 \text{ ناپیوسته} \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to1^+}f(x)+\lim_{x\to1^-}f(x)\right)=\frac{1}{2}(1+1)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Subject: ____________ Date: ____________

$L = \frac{2\pi}{2} = \pi$

مثال: سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1+x & -\pi < x < 0 \\ 1-x & 0 < x < \pi \end{cases}$ را بیابید؟

$$f(-x) = \begin{cases} 1-x & -\pi < -x < 0 \\ 1+x & 0 < -x < \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x & 0 < x < \pi \\ 1+x & -\pi < x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

$\Rightarrow$ زوج $f(x) \Rightarrow b_n = 0 \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\cos(nx)\,dx\ (*)$

+	$1-x$	$\cos(nx)$
−	-1	$\frac{1}{n}\sin(nx)$
+	0	$\frac{-1}{n^2}\cos(nx)$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(1-x)}{n}\sin(nx) - \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{n^2}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow a_n = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right)$$

$$(*)\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi^2}{2}\right) = 2-\pi$$

$$f(x) \text{ سری فوریه } = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{1}{2}(2-\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right)\cos(nx)$$

مثال: سری فوریه $-1 < x < 1$ ، $f(x) = e^{2x}$ را بنویسید؟ (۵)

$l = 1$ $\quad \boxed{\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}}$

$$f(x) \text{ نه فرد نه زوج} \Rightarrow a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \int_{-1}^{1} e^{2x}\cos(n\pi x)\,dx$$

	~ ~ ~ ~ ~	~ cosh ، sinh ، e^x ، cos x ، sin
+	$\cos(n\pi x)$	e^{2x}
−	$-n\pi\sin(n\pi x)$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
+	$-n^2\pi^2\cos(n\pi x)$	$\frac{1}{4}e^{2x}$

$$= \frac{\frac{1}{2}e^{2x}\cos(n\pi x) + \frac{n\pi}{4}e^{2x}\sin(n\pi x)}{1 - \left(\frac{-n^2\pi^2}{4}\right)}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4+n^2\pi^2}{4}}\left(e^{2}(-1)^n - e^{-2}(-1)^n\right)$$

$$= \frac{2(-1)^n\overbrace{(e^{2}-e^{-2})}^{2\sinh(2)}}{4+n^2\pi^2} \Rightarrow a_n = \frac{4(-1)^n\sinh(2)}{4+n^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{4\sinh(2)}{4} = \sinh(2)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \int_{-1}^{1} e^{2x}\sin(n\pi x)\,dx$$

+	$\sin(n\pi x)$	e^{2x}
−	$n\pi\cos(n\pi x)$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
+	$-n^2\pi^2\sin(n\pi x)$	$\frac{1}{4}e^{2x}$

$$= \frac{\frac{1}{2}e^{2x}\sin(n\pi x) - \frac{n\pi}{4}e^{2x}\cos(n\pi x)}{1 - \left(\frac{-n^2\pi^2}{4}\right)}\Bigg|_{-1}^{1}$$

Subject: (۳) Date:

تذکر: $f(x)$ فرد $\Rightarrow a_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \\ f(x) \text{ سری فوریه } = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \end{cases}$

$f(x)$ زوج $\Rightarrow b_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx \quad , \quad n = 0, 1, \ldots \\ f(x) \text{ سری فوریه } = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) \end{cases}$

مثال: سری فوریه $\begin{cases} f(x) = x & -\pi < x < \pi \\ p = 2\pi \end{cases}$ را بنویسید؟

$p = 2\pi \Rightarrow L = \frac{p}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

	$(\ )'$	$\int$
+	x	$\sin(nx)$
−	1	$\frac{-1}{n}\cos(nx)$
+	0	$\frac{-1}{n^2}\sin(nx)$

$f(x)$ فرد $\Rightarrow a_n = 0 \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{n}(-1)^n\right] = \frac{-2}{n}(-1)^n$

$f(x)$ سری فوریه $= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n}(-1)^n \sin(nx)$

مثال: سری فوریه $f(x) = x^2 \quad -1 < x < 1$ را بنویسید؟

$L = \frac{\text{طول بازه}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

	$(\ )'$	$\int$
+	x^2	$\cos(n\pi x)$
−	$2x$	$\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$
+	2	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$
−	0	$\frac{-1}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x)$

$f(x)$ زوج $\Rightarrow b_n = 0 \Rightarrow a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2\cos(n\pi x)\,dx \quad (*)$

$= 2\left[\frac{x^2}{n\pi}\sin(n\pi x) + \frac{2x}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) - \frac{2}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x)\right]_0^1$

$= 2\left[\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n\right] = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \quad n \neq 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} a_0 = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$f(x)$ سری فوریه $= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$

*) وقتی مخرج a_n ازای بعضی از مقادیر n صفر شود، a_n را برای آن مقدار n، جداگانه محاسبه می کنیم

Subject: .... Date: ....

تکه‌ای هموار: تابع $f(x)$ را در بازه (a,b) تکه‌ای هموار گویند اگر $f(x)$ و $f'(x)$ در این بازه تکه‌ای پیوسته باشد.

سری فوریه: فرض کنید $f(x)$ تابع متناوب با دوره تناوب $p=2L$ باشد و همچنین $f(x)$ در (نه زوج باشد نه فرد) بازه $-L<x<L$ تکه‌ای هموار باشد در اینصورت:

صورت حقیقی سری فوریه $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$

که در آن ضرایب a_0 و a_1 و ..... و b_1 ، b_2 ، ..... را ضرایب حقیقی سری فوریه $f(x)$ می‌نامند

از فرمول های زیر محاسبه می‌شود:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad , n=0,1,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad , n=1,2,\ldots$$

نکته: $f(x)$ فرد باشد $\Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$

$f(x)$ زوج باشد $\Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$

نکته: L برابر است با نصف طول بازه

نکته: $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\frac{\pi}{2}) = 0$, $\begin{cases} \sin(n\frac{\pi}{2}) \overset{\text{n فرد}}{=} (-1)^{n+1} \\ \sin(n\frac{\pi}{2}) \overset{\text{n زوج}}{=} 0 \end{cases}$

Subject: (۱) Date:

بنام خدا

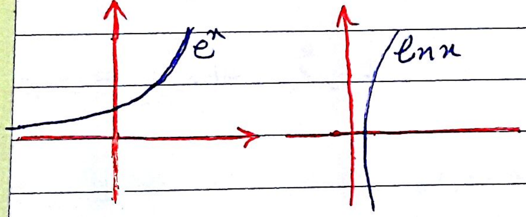
یادآوری:

تابع زوج $y=f(x)$ ⇐
۱) متقارن باشد D_f
۲) قرینه نسبت به y
۳) $f(-x)=f(x)$

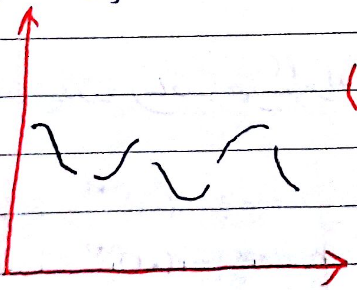
مثال: اعداد ثابت، x و توانهای زوج x، $\cosh x$، $\cos x$، $|x|$، $e^{|x|}$، $e^{-|x|}$، ......

تابع فرد $y=f(x)$ ⇐
۱) متقارن باشد D_f
۲) قرینه نسبت به مبدأ
۳) $f(-x)=-f(x)$

مثال: x و توانهای فرد x و $\sin x$ و $\sinh x$ و $tg x$، $\cot x$



نکته: $\ln x$، e^x نه زوج است و نه فرد

نکته:
۱) زوج × زوج = زوج
۲) زوج × فرد = فرد
۳) فرد × فرد = زوج
۴) زوج ± زوج = زوج
۵) زوج ± فرد = نه زوج و نه فرد
۶) فرد ± فرد = فرد

تابع تکه ای پیوسته: تابع $f(x)$ را در بازه (a,b) تکه ای پیوسته گویند اگر تعداد نقاط ناپیوستگی این تابع متناهی باشد (تعداد نقاط ناپیوستگی تابع را بتوان شمرد)